Ivo Marek

Řešení rovnic pro pohyb elektronu v homogenním časově proměnném magnetickém poli

Aplikace matematiky, Vol. 2 (1957), No. 1, 69--73

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/102555`

ŘEŠENÍ ROVNIC PRO POHYB ELEKTRONU V HOMOGENNÍM ČASOVĚ PROMĚNNÉM MAGNETICKÉM POLI

IVO MAREK

(Došlo dne 22. září 1956.) DT: 537.533.3

Z Maxwellových rovnic pro elektromagnetické pole vyplývá, že existuje jediné časově proměnné homogenní magnetické pole. Je charakterisováno tím, že jeho intensita je lineární funkcí času.

Pro výpočet zvolme složky intensity magnetického pole v pravoúhlé soustavě souřadné (x, y, z) takto:

$$H_x = 0\,, \quad H_y = 0\,, \quad H_z = a\tau\,,$$

kde τ značí čas a konstanta $a > 0$ je pevně určena. Pohyb elektronu v takovém magnetickém poli se řídí známými pohybovými rovnicemi, které po zavedení veličiny $t = a\tau$ a nových funkcí[1])

$$u(t) = x(t) - i\, y(t)\,, \tag{1}$$

$$v(t) = x(t) + i\, y(t) \tag{2}$$

přejdou v systém obyčejných diferenciálních rovnic:

$$\frac{\mathrm{d}^2 u(t)}{\mathrm{d}t^2} - i\alpha t \frac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t} - \frac{1}{2}\, i\alpha\, u(t) = 0\,,$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 v(t)}{\mathrm{d}t^2} + i\alpha t \frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{2}\, i\alpha\, v(t) = 0\,, \tag{3}$$

při čemž konstanta α je dána výrazem

$$\alpha = \frac{e}{amc}$$

kde m je hmota elektronu, e jeho náboj, c rychlost světla ve vakuu; konstanta a byla již určena výše. Vhodnou volbou počátečních podmínek pro z-ovou složku dráhy pohybu bylo docíleno toho, že pohyb se děje v rovině $z = 0$.

[1]) Všechny funkce v práci se vyskytující jsou reálné funkce reálné proměnné s výjimkou funkcí (1) a (2), jež jsou komplexními funkcemi reálné proměnné. i je imaginární jednotka.

Položíme-li[2])

$$u(t) = \exp\left\{\frac{1}{4}\, i\alpha t^2\right\} z_1(t)\,,$$

$$v(t) = \exp\left\{-\frac{1}{4}\, i\alpha t^2\right\} z_2(t) \tag{4}$$

převedeme hledání řešení systému (3) na úlohu určiti řešení jediné rovnice:

$$\frac{\mathrm{d}^2 z(t)}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\alpha^2}{4}\, t^2\, z(t) = 0\,, \tag{5}$$

jejímiž řešeními jsou z_1 a z_2 ve výrazech (4).

Rovnice (5) je rovnicí Besselova typu, t. j. speciálním případem rovnice

$$\frac{\mathrm{d}^2 z(t)}{\mathrm{d}t^2} + \frac{1-2\omega}{t} \cdot \frac{\mathrm{d}z(t)}{\mathrm{d}t} + \left(\mu^2 \varrho^2 t^{2(\varrho-1)} + \frac{\omega^2 - \nu^2\varrho^2}{t^2}\right) z(t) = 0\,,$$

kde ω, μ, ν a ϱ jsou určitá čísla. V našem případě jsou všechna reálná a jsou rovna následujícím výrazům:

$$1 - 2\omega = 0\,, \quad \mu^2\varrho^2 = \frac{\alpha^2}{4}\,, \quad 2(\varrho - 1) = 2\,, \quad \omega^2 - \nu^2\varrho^2 = 0\,.$$

Jsou proto výrazy

$$\sqrt{t}\, J_{\frac{1}{4}}\left(\frac{\alpha}{4}\, t^2\right), \quad \sqrt{t}\, J_{-\frac{1}{4}}\left(\frac{\alpha}{4}\, t^2\right)$$

kde $J_{\frac{1}{4}}$, $J_{-\frac{1}{4}}$ jsou známé Besselovy funkce indexu $\frac{1}{4}$, resp. $-\frac{1}{4}$, nezávislými partikulárními integrály rovnice (5). Obdržíme tedy obecné řešení naší úlohy ve tvaru:

$$x(t) = \frac{1}{2}\sqrt{t}\left\{\left[A \exp\left(\frac{1}{4}\, i\alpha t^2\right) + C \exp\left(-\frac{1}{4}\, i\alpha t^2\right)\right] J_{\frac{1}{4}}\left(\frac{\alpha}{4}\, t^2\right) + \right.$$
$$\left. + \left[B \exp\left(\frac{1}{4}\, i\alpha t^2\right) + D \exp\left(-\frac{1}{4}\, i\alpha t^2\right)\right] J_{-\frac{1}{4}}\left(\frac{\alpha}{4}\, t^2\right)\right\},$$
$$y(t) = \frac{1}{2i}\sqrt{t}\left\{\left[-A \exp\left(\frac{1}{4}\, i\alpha t^2\right) + C \exp\left(-\frac{1}{4}\, i\alpha t^2\right)\right] J_{\frac{1}{4}}\left(\frac{\alpha}{4}\, t^2\right) + \right.$$
$$\left. + \left[-B \exp\left(\frac{1}{4}\, i\alpha t^2\right) + D \exp\left(-\frac{1}{4}\, i\alpha t^2\right)\right] J_{-\frac{1}{4}}\left(\frac{\alpha}{4}\, t^2\right)\right\}. \tag{6}$$

Pro ilustraci pohybu elektronu ve vyšetřovaném typu pole stačí řešiti úlohu s těmito počátečními podmínkami:

Při $t = 0$ budiž

$$x(0) = 0\,, \quad x'(0) = 0\,, \quad y(0) = 0\,, \quad y'(0) = v_0\,,$$

kde v_0 je počáteční rychlost, tedy konstanta.

---

[2]) exp (β) značí jako obvykle výraz e^β.

Po určení integračních konstant v (6) obdržíme řešení ve složkách:

$$x(t) = k\sqrt{t}\, J_{\frac{1}{4}}\left(\frac{\alpha}{4}\, t^2\right) \sin \frac{\alpha}{4}\, t^2 \,,$$

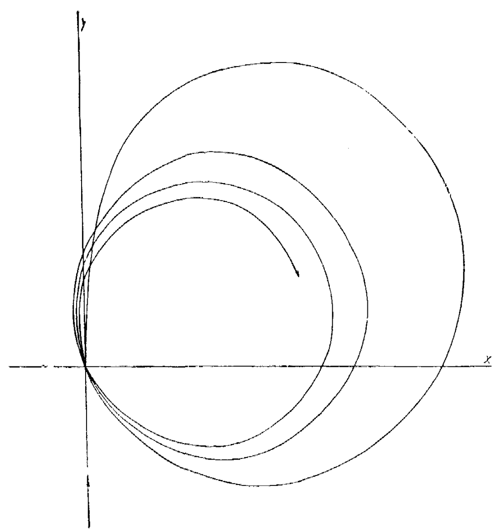
$$y(t) = k\sqrt{t}\, J_{\frac{1}{4}}\left(\frac{\alpha}{4}\, t^2\right) \cos \frac{\alpha}{4}\, t^2 \,, \tag{7}$$

kde $k = \dfrac{2^{\frac{3}{4}}\Gamma\left(\frac{5}{4}\right)}{\alpha^{\frac{1}{4}}}\, v_0$.

Zavedeme-li místo složek x, y polární souřadnice $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ a vyloučíme-li ze vzorců (7) parametr t, obdržíme rovnici trajektorie:

$$r = \frac{2k}{\sqrt{\alpha}}\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)^{\frac{1}{2}} J_{\frac{1}{4}}\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right), \quad \varphi < \frac{\pi}{2} \,.$$

Tvar této trajektorie je znázorněn na následujícím grafu:



Obr. 1.

Ještě nás zajímá závislost kinetické energie elektronu na čase τ. Zkoumáme proto výraz

$$F(t) = x'^2(t) + y'^2(t) \,,$$

který je úměrný kinetické energii. Použijeme-li známých rekurentních formulí platných pro Besselovy funkce:

$$\gamma\, J_\gamma(t) = \frac{t}{2}\left\{J_{\gamma-1}(t) + J_{\gamma+1}(t)\right\} \,, \tag{8}$$

a

$$J_{\gamma+p}(t) = (-1)^p t^\gamma \frac{\mathrm{d}^p}{\mathrm{d}t^p} \{t^{-\gamma} J_\gamma(t)\}\,, \tag{9}$$

kde γ je libovolné komplexní číslo, p pak číslo přirozené, zjistíme, že platí

$$F(t) = \frac{k^2}{4}\left\{\alpha^2 t^3 J_{\frac{1}{4}}^2\left(\frac{\alpha}{4}t^2\right) + \left[\frac{2}{\sqrt{t}} J_{\frac{1}{4}}\left(\frac{\alpha}{4}t^2\right) - \alpha t^{\frac{3}{2}} J_{\frac{5}{4}}\left(\frac{\alpha}{4}t^2\right)\right]^2\right\}. \tag{10}$$

Podle formulí (8) a (9) lze dále ukázati, že platí:

$$F'(t) = \frac{1}{2} k^2 \alpha^2 t^2 J_{\frac{1}{4}}^2\left(\frac{\alpha}{4}t^2\right)$$

a tento výraz je stále větší nebo roven nule. Tedy výraz (10) s rostoucím τ roste a tudíž i kinetická energie elektronu neustále vzrůstá. Rychlost růstu můžeme sledovati na připojené tabulce:

α	t	$\frac{F(t)}{k^2}$
10^{14}	10^{-7}	$1{,}912 \cdot 10^7$
10^{14}	10^{-6}	$2{,}55 \cdot 10^8$
10^{14}	10^{-5}	$2{,}512 \cdot 10^9$
10^{15}	10^{-7}	$2{,}688 \cdot 10^8$
10^{15}	10^{-6}	$2{,}54 \cdot 10^9$
10^{15}	10^{-5}	$2{,}668 \cdot 10^{10}$

Резюме

РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ДЛЯ ДВИЖЕНИЯ ЭЛЕКТРОНА В ОДНОРОДНОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

ИВО МАРЕК (Ivo Marek)

(Поступило в редакцию 22/IX 1956 г.)

В сообщении дано решение уравнений для движения электрона в однородном магнитном поле, линейно зависимом от времени. Определяется траектория и зависимость кинетической энергии электрона от времени.

Summary

THE SOLUTION OF EQUATIONS DEFINING THE MOTION OF AN ELECTRON IN A HOMOGENEOUS MAGNETIC FIELD

IVO MAREK

(Received September 22, 1956.)

This paper is concerned with the solution of equations defining the motion of an electron in a homogeneous magnetic field which is a linear function of time. The trajectory of the electron and the time-dependent function of kinetic energy are established.