

# Aplikace matematiky

---

František Zítek

Příspěvek k teorii smíšených systémů hromadné obsluhy

*Aplikace matematiky*, Vol. 2 (1957), No. 2, 154--159

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/102562>

## Terms of use:

© Institute of Mathematics AS CR, 1957

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

PŘÍSPĚVEK K THEORII SMÍŠENÝCH SYSTÉMŮ  
HROMADNÉ OBSLUHY

FRANTIŠEK ZÍTEK

(Došlo dne 28. dubna 1956.)

DT.519.21:621.395.34

V článku je řešen známý Erlangův problém theorie hromadné obsluhy v případě smíšeného systému (s čekáním i se ztrátami), kde počet čekajících je omezen. Výsledky jsou přímým zobecněním výsledků známých pro oba jednotlivé typy systémů.

1. V monografii [1] věnované problémům systémů hromadné obsluhy studuje CHINČIN systémy se ztrátami a systémy s čekáním, a to oba typy odděleně; současně však upozorňuje na možnost existence systémů smíšeného typu ([1], str. 56). Zatím co theorie systémů „čistých“ typů — zejména čekajících — je dnes již více než bohatě rozvinuta, nebyla studiu smíšených systémů dosud věnována taková pozornost.<sup>1)</sup>

V celém článku budeme užívatí pojmů, termínů, symbolů a označení zavedených v [1], kde čtenář najde všechny potřebné definice a vysvětlení.

2. Budeme uvažovati nejjednodušší systém s  $n$  navzájem rovnocennými linkami (полнодоступный пучок  $n$  линий), charakterisovaný exponenciálním rozložením délek intervalů mezi voláními (s parametrem  $\lambda$ ), exponenciálním rozložením délek hovorů (s parametrem  $\beta$ ) a touto čekací disciplinou: při obsazení všech linek čekají další volání v jednoduché frontě, avšak nejvýše v počtu  $r$ . Jakmile ve frontě čeká již  $r$  volání, jsou další odmítána, aniž by byla obslužena. Čekající volání obsazují uvolněné linky v pořadí příchodu do fronty ihned po skončení předcházejícího hovoru.

3. Prvým naším úkolem bude řešení *Erlangova problému* pro náš systém. Základní Erlangovu soustavu diferenciálních rovnic pro pravděpodobnosti  $P_k(t)$  si sestavíme snadno; bude to

<sup>1)</sup> Na existenci práce [2] byl autor upozorněn teprve recensentem po odevzdání rukopisu redakci.

$$\begin{aligned}
P'_0(t) &= -\lambda P_0(t) + \beta P_1(t) \\
P'_1(t) &= \lambda P_0(t) - (\lambda + \beta) P_1(t) + 2\beta P_2(t) \\
&\dots\dots\dots \\
P'_{n-1}(t) &= \lambda P_{n-2}(t) - [\lambda + (n-1)\beta] P_{n-1}(t) + n\beta P_n(t) \\
P'_n(t) &= \lambda P_{n-1}(t) - (\lambda + n\beta) P_n(t) + n\beta P_{n+1}(t) \\
&\dots\dots\dots \\
P'_{n+r-1}(t) &= \lambda P_{n+r-2}(t) - (\lambda + n\beta) P_{n+r-1}(t) + n\beta P_{n+r}(t) \\
P'_{n+r}(t) &= \lambda P_{n+r-1}(t) - n\beta P_{n+r}(t).
\end{aligned} \tag{1}$$

V důsledku Markovovy věty, která zřejmě platí i v našem případě, dostaneme odtud pro limitní pravděpodobnosti  $p_k$  soustavu algebraických lineárních rovnic

$$\begin{aligned}
-\lambda p_0 + \beta p_1 &= 0, \\
\lambda p_{k-1} - (\lambda + k\beta) p_k + (k+1)\beta p_{k+1} &= 0, \quad 0 < k < n, \\
\lambda p_{k-1} - (\lambda + n\beta) p_k + n\beta p_{k+1} &= 0, \quad n \leq k < n+r, \\
\lambda p_{n+r-1} - n\beta p_{n+r} &= 0,
\end{aligned} \tag{2}$$

spolu s normovací podmínkou

$$\sum_{k=0}^{n+r} p_k = 1. \tag{3}$$

K řešení soustavy (2) použijeme stejného obratu jako v [1] a dostaneme tak pro  $p_k$  výrazy

$$p_k = \frac{\lambda^k}{\beta^k \cdot k!} p_0, \quad 1 \leq k \leq n, \tag{4}$$

$$p_k = \frac{\lambda^k}{\beta^k n! n^{k-n}} \cdot p_0, \quad n \leq k \leq n+r. \tag{5}$$

Poslední vzorec lze psát též ve tvaru

$$p_{k+n} = p_n \left( \frac{\lambda}{n\beta} \right)^k, \quad 0 \leq k \leq r. \tag{5'}$$

Přitom  $p_0$  určíme z (3) jako

$$p_0 = \frac{1}{\sum_{k=0}^n \frac{\lambda^k}{\beta^k k!} + \frac{\lambda^n}{\beta^n \cdot n!} \sum_{k=1}^r \left( \frac{\lambda}{n\beta} \right)^k}. \tag{6}$$

Odtud pak ihned plyne:

1. Pravděpodobnost odmítnutí volání je přímo

$$p_{n+r} = p_0 \cdot \frac{\lambda^{n+r}}{\beta^{n+r} \cdot n! \cdot n^r}; \tag{7}$$

2. Pravděpodobnost okamžitého hovoru bez čekání je rovna

$$\sum_{k=0}^{n-1} p_k = p_0 \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\lambda^k}{\beta^k k!}; \quad (8)$$

3. Pravděpodobnost čekání vůbec je dána součtem

$$\sum_{k=0}^{r-1} p_{n+k} = p_n \cdot \sum_{k=0}^{r-1} \left(\frac{\lambda}{n\beta}\right)^k = p_n \cdot \frac{1 - \left(\frac{\lambda}{n\beta}\right)^r}{1 - \frac{\lambda}{n\beta}}. \quad (9)$$

4. Dalším naším úkolem bude *odvození zákona rozložení délky doby čekání*  $\gamma$ . Stejným postupem jako v [1], § 35, dostaneme i v našem případě

$$P\{\gamma > t\} = \sum_{k=0}^{r-1} p_{n+k} \cdot P_{n+k}(\gamma > t), \quad (10)$$

kde  $P_{n+k}(\gamma > t)$ ,  $k = 0, 1, \dots, r-1$  je, jako v [1], podmíněná pravděpodobnost jevu  $\{\gamma > t\}$  za předpokladu, že volání je  $(k+1)$ -vé ve frontě. Pravděpodobnosti  $P_{n+k}(\gamma > t)$  jsou, jak vyplývá z předpokladu exponenciálního zákona rozložení délek hovorů, dány výrazy

$$P_{n+k}(\gamma > t) = \sum_{j=0}^k e^{-n\beta t} \frac{(n\beta t)^j}{j!} = \int_t^{\infty} (n\beta)^{k+1} e^{-n\beta z} \frac{z^k}{k!} dz = \int_{n\beta t}^{\infty} e^{-y} \frac{y^k}{k!} dy. \quad (11)$$

Odtud pak

$$P\{\gamma > t\} = \sum_{k=0}^{r-1} p_n \frac{\lambda^k}{n^k \beta^k} \cdot \left( \int_t^{\infty} (n\beta)^{k+1} e^{-n\beta z} \frac{z^k}{k!} dz \right) = p_n \cdot n\beta \cdot \int_t^{\infty} e^{-n\beta z} \left( \sum_{k=0}^{r-1} \frac{(\lambda z)^k}{k!} \right) dz. \quad (12)$$

Při  $r \rightarrow \infty$  dostáváme limitním přechodem, který je oprávněný za předpokladu  $\lambda < n\beta$ ,

$$\lim P\{\gamma > t\} = p_n \cdot n\beta \cdot \int_t^{\infty} e^{-(n\beta-\lambda)z} dz = p_n \cdot \frac{n\beta \cdot e^{-(n\beta-\lambda)t}}{n\beta - \lambda} = p_n \cdot e^{-(n\beta-\lambda)t} \cdot \frac{1}{1 - \frac{\lambda}{n\beta}}, \quad (13)$$

tedy výsledek shodný s výsledkem na str. 101 v [1], platným pro případ neomezené fronty.

Při konečném  $r$  a  $t = 0$  dostáváme z (12)

$$P\{\gamma > 0\} = p_n \sum_{k=0}^{r-1} \left[ \left(\frac{\lambda}{n\beta}\right)^k \int_0^{\infty} e^{-y} \frac{y^k}{k!} dy \right] = p_n \cdot \sum_{k=0}^{r-1} \left(\frac{\lambda}{n\beta}\right)^k = \sum_{k=0}^{r-1} p_{n+k}, \quad (14)$$

t. j. pravděpodobnost čekání vůbec. Ježto pak kromě toho je

$$P\{\gamma = 0\} = \sum_{k=0}^{n-1} p_k, \quad (15)$$

je vzhledem k (7), (8) a (9) distribuční funkce čekací doby  $\gamma$  (za předpokladu, že volání skutečně čekalo) dána výrazem

$$F(t) = 1 - \frac{P\{\gamma > t\}}{\sum_{k=0}^{r-1} p_{n+k}}, \quad t \geq 0. \quad (16)$$

Distribuční funkci (16) odpovídá frekvenční funkce

$$f(t) = \frac{\sum_{k=0}^{r-1} \frac{\lambda^k t^k}{k!}}{\sum_{k=0}^{r-1} \left(\frac{\lambda}{n\beta}\right)^k} e^{-n\beta t} n\beta, \quad (17)$$

jež po transformaci  $z = n\beta t$ ,  $\frac{\lambda}{n\beta} = \delta$  přejde na jednodušší tvar

$$g(z) = e^{-z} \cdot \frac{1 - \delta}{1 - \delta^r} \sum_{k=0}^{r-1} \frac{\delta^k z^k}{k!}. \quad (18)$$

5. Určíme si dále *střední dobu čekání*. Bude to

$$\mathbf{E}\gamma = \int_0^{\infty} t \cdot f(t) dt = \frac{1}{n\beta} \int_0^{\infty} z g(z) dz, \quad (19)$$

takže podle (18) máme

$$\mathbf{E}\gamma = \frac{1}{n\beta} \cdot \frac{1 - \delta}{1 - \delta^r} \sum_{k=0}^{r-1} \frac{\delta^k}{k!} \int_0^{\infty} z^{k+1} e^{-z} dz = \frac{1}{n\beta} \cdot \frac{1 - \delta}{1 - \delta^r} \cdot \sum_{k=0}^{r-1} (k+1) \delta^k. \quad (20)$$

V případě neomezené fronty má, jak známo z [1],  $\gamma$  rozložení exponenciální s frekvenční funkcí  $(n\beta - \lambda) e^{-(n\beta - \lambda)t}$ , a tedy střední hodnotu  $(n\beta - \lambda)^{-1}$ , platí ovšem  $\delta < 1$ . Za stejného předpokladu, t. j. opět  $\lambda < n\beta$ , máme pak z (20)

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \mathbf{E}\gamma = \frac{1}{n\beta} (1 - \delta) \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \delta^k (k+1) = (n\beta - \lambda)^{-1}, \quad (21)$$

výsledky se tedy shodují.

6. Abychom mohli lépe porovnat, jak se navzájem liší systémy s omezenou frontou a s neomezenou frontou, byly napočteny některé numerické hodnoty, a to jednak střední doby čekání, jednak pravděpodobnosti odmítnutí. Jsou uvedeny v připojených tabulkách pro tyto hodnoty parametrů:  $n = 10$ ,

$\beta = 1$ ,  $\lambda = 1, 2, \dots, 9$ ,  $r = 0, 2, 5, 10, 15, 20, \infty$ . Tabulky II (resp. analogických tabulek pro jiné hodnoty  $n$ ) lze m. j. použít na př. k určení maximální přípustné konečné délky fronty pro dané  $\lambda$  a danou pravděpodobnost odmítnutí.

Jak vyplývá z obou tabulek, postačí k dosažení vlastností blízkých vlastnostech systémů s neomezenou frontou při „středních“ hodnotách  $\lambda$  (t. j.  $\lambda \doteq 4$  až 6) již  $r \doteq 10$ .

I. Tabulka středních dob čekání.

$\lambda \backslash r$	2	5	10	15	20	$\infty$
1	0,109 091	0,111 106	0,111 111	0,111 111	0,111 111	0,111 111
2	0,116 667	0,124 840	0,125 000	0,125 000	0,125 000	0,125 000
3	0,123 077	0,141 639	0,142 851	0,142 857	0,142 857	0,142 857
4	0,128 571	0,161 494	0,166 562	0,166 665	0,166 667	0,166 667
5	0,133 333	0,183 871	0,199 022	0,199 954	0,199 998	0,200 000
6	0,137 500	0,207 842	0,243 917	0,249 294	0,249 927	0,250 000
7	0,141 176	0,232 321	0,304 265	0,326 178	0,331 736	0,333 333
8	0,144 444	0,256 307	0,379 710	0,445 299	0,476 673	0,500 000
9	0,147 368	0,279 029	0,464 660	0,611 090	0,723 193	1,000 000

Pro  $r = 0$  je ovšem  $E\tau$  stále rovno nule.

II. Tabulka pravděpodobností odmítnutí.

$\lambda \backslash r$	0	2	5	10	15	20
1	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
2	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
3	0,0008	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
4	0,0053	0,0008	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000
5	0,0184	0,0045	0,0006	0,0000	0,0000	0,0000
6	0,0431	0,0149	0,0032	0,0002	0,0000	0,0000
7	0,0787	0,0353	0,0115	0,0019	0,0003	0,0001
8	0,1217	0,0663	0,0300	0,0091	0,0029	0,0009
9	0,1680	0,1057	0,0613	0,0295	0,0157	0,0088

Pro  $r = \infty$  je pravděpodobnost odmítnutí vždy rovna nule.

## LITERATURA

- [1] A. Я. Хинчин: Математические методы теории массового обслуживания; Труды Матем. Института им. В. А. Стеклова, XLIX, Москва 1955.
- [2] H. Störmer: Wartezeitlenkung in handbedienten Vermittlungsanlagen; Archiv der elektrischen Übertragung, 10 (1956), 58–64.

К ТЕОРИИ СМЕШАННЫХ СИСТЕМ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ

ФРАНТИШЕК ЗИТЭК (František Zitek)

(Поступило в редакцию 28/IV 1956 г.)

В работе решена задача Эрланга для смешанной системы (см. [1], стр. 56) в случае простейшего потока вызовов и полнодоступного пучка  $n$  линий, причем число ожидающих ограничено ( $\leq r$ ). Получены вероятности потери (7) и распределение времени ожидания (16)—(18). В таблицах даны: I среднее время ожидания и II вероятности потери, в случае  $n = 10$ ,  $\beta = 1$  для некоторых значений  $r$  и  $\lambda$ .

Zusammenfassung

ZUR THEORIE DER GEMISCHTEN WARTESYSTEME

FRANTIŠEK ZÍTEK

(Eingegangen am 28. April 1956.)

In dieser Arbeit wird das Erlangsche Problem für den Fall eines gemischten Wartesystems gelöst (s. [1], S. 56), in welchem die Anzahl der Wartenden begrenzt ( $\leq r$ ) ist. Es werden die Verlustwahrscheinlichkeiten (7) und die Wartezeitverteilung (16)—(18) abgeleitet. Numerische Werte der mittleren Wartezeiten (I) und der Verlustwahrscheinlichkeiten (II) sind für den Fall  $n = 10$ ,  $\beta = 1$  für einige Werte der Parameter  $\lambda$  und  $r$  in zwei Tabellen angegeben.