Olga Pokorná

Schéma pro řešení soustav lineárních algebraických rovnic eliminací

Aplikace matematiky, Vol. 2 (1957), No. 3, 235--241

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/102569

NUMERICKÁ PRAXE

V rubrice „Numerická praxe" bude časopis Aplikace matematiky uveřejňovat osvědčené metody řešení často se vyskytujících úloh. Tyto postupy jsou uvedeny v literatuře, nejsou však většinou běžně známy.

Prosíme čtenáře, aby nás upozorňovali na numerické metody, které se osvědčily v jejich praxi.

SCHEMA PRO ŘEŠENÍ SOUSTAV LINEÁRNÍCH ALGEBRAICKÝCH ROVNIC ELIMINACÍ

OLGA POKORNÁ

Jednou z nejznámějších metod numerického řešení soustav lineárních algebraických rovnic je eliminační metoda. Poměrně málo známé však je praktické schema, které pro tuto metodu uvádí W. E. MILNE [3], a které velmi usnadní práci při eliminaci. (Toto schema se jen nepatrně liší od starší Banachiewiczovy metody, užívající t. zv. krakowianů [1]). Podrobné matematické odvození metody je uvedeno v literatuře (na př. [2], [4]) a nebudeme je zde opakovat.

Uvádíme zde jen podrobný popis výpočtu při použití tohoto schematu. Pro usnadnění popisu uvedeme schema jen pro soustavu čtyř rovnic, které označíme

$$a_i x_1 + b_i x_2 + c_i x_3 + d_i x_4 = e_i \quad (i = 1, 2, 3, 4)\,.$$

Koeficienty soustavy (i pravé strany) sestavíme do tabulky, označené na obrázku písmenem A. Kromě toho si připravíme ještě jednu tabulku stejného tvaru, na obrázku označenou písmenem B. Tabulka B je na začátku výpočtu prázdná. Na obrázku jsou jednotlivá pole tabulky B očíslována indexy 1 až 20 v tom pořadí, v jakém je při výpočtu postupně zaplňujeme. Při popisu postupu budeme symbolem $\langle r \rangle$ označovat číslo (i se znaménkem), ležící v poli tabulky B označeném indexem r. Tedy na př. $\langle 6 \rangle$ je číslo v poli 6. Tak zvaná diagonální pole, t. j. pole v i-tém řádku a i-tém sloupci tabulky B ($i = 1, 2, 3, 4$), jsou podtržena pro lepší orientaci při dalším početním postupu.

	a_1	b_1	c_1	d_1	e_1
	a_2	b_2	c_2	d_2	e_2
A	a_3	b_3	c_3	d_3	e_3
	a_4	b_4	c_4	d_4	e_4

	1	5	6	7	8
	2	9	12	13	14
B	3	10	15	17	18
	4	11	16	19	20

C	$x_1 =$	$x_2 =$	$x_3 =$	$x_4 =$

Tabulku B vyplňujeme takto: Nejprve do jejího prvního sloupce opíšeme příslušná stejnolehlá čísla z tabulky A. Tedy na př. v poli 3 bude číslo $\langle 3 \rangle = a_3$. Pak do prvního řádku, počínajíce polem 5, napíšeme čísla, vzniklá ze stejnolehlých čísel v tabulce A, dělených číslem z (podtrženého) pole 1 tabulky B. Tedy na př. v poli 5 bude číslo $\langle 5 \rangle = b_1 : \langle 1 \rangle$. Takto jsme tedy obsadili všechna pole v prvním sloupci a v prvním řádku tabulky B.

Dále postupujeme v obdobných dvojicích kroků tak, že počínajíce druhým sloupcem a druhým řádkem vyplníme postupně vždy:

a) Jeden sloupec směrem shora dolů, počínajíce jeho prvním prázdným polem, t. j. polem diagonálním.

b) Jeden řádek počínajíce jeho prvním prázdným polem, t. j. polem vpravo vedle diagonálního.

Postup výpočtu:

a) Výpočet prvků v diagonále nebo pod ní, tedy prvků, počítaných ve sloupci, je takovýto: od stejnolehlého prvku v tabulce A odečteme postupně součin každého prvku, ležícího v tabulce B vlevo v tomtéž řádku jako uvažovaný prvek, s příslušným prvkem, ležícím v tomtéž sloupci jako počítaný prvek, a to v části nad diagonálou. (Přitom „příslušným" prvkem k i-tému prvku zleva v uvedeném řádku zde rozumíme i-tý prvek shora v uvedeném sloupci). Tedy na př.:

$$\langle 11 \rangle = b_4 - \langle 4 \rangle \times \langle 5 \rangle ;$$

nebo

$$\langle 19 \rangle = d_4 - \langle 4 \rangle \times \langle 7 \rangle - \langle 11 \rangle \times \langle 13 \rangle - \langle 16 \rangle \times \langle 17 \rangle .$$

b) Výpočet prvků v polích nad diagonálou, tedy prvků, počítaných v řádku, je podobný: od stejnolehlého prvku v tabulce A odečteme postupně součin každého prvku, ležícího v tabulce B vlevo od diagonály v tomtéž řádku jako počítaný prvek, s příslušným prvkem, ležícím nad počítaným prvkem v tomtéž sloupci. Výsledek pak ještě dělíme příslušným diagonálním prvkem (podtrženým). Tedy na př.:

$$\langle 12 \rangle = [c_2 - \langle 2 \rangle \times \langle 6 \rangle] : \langle 9 \rangle ;$$

nebo

$$\langle 18 \rangle = [e_3 - \langle 3 \rangle \times \langle 8 \rangle - \langle 10 \rangle \times \langle 14 \rangle] : \langle 15 \rangle .$$

Poznámka 1: Vyjde-li náhodou v diagonále v tabulce B nula (nebo číslo velmi blízké nule), je nutno vyměnit příslušný řádek s některým řádkem pod ním, který v příslušném sloupci nemá nulu. Kdyby takový řádek nebylo možno vybrat, znamenalo by to, že soustava nemá jednoznačné řešení.

Poznámka 2: Je-li matice soustavy symetrická, můžeme počítat prvky nad diagonálou v tabulce B úsporněji tak, že vždy prvek pod diagonálou tabulky B, položený symetricky k počítanému prvku, dělíme příslušným diagonálním prvkem této tabulky. Kdyby tedy byla matice v tabulce A na obrázku symetrická, bylo by v tabulce B na př. $\langle 13 \rangle = \langle 11 \rangle : \langle 9 \rangle$. Prvky ve sloupci tabulky B, odpovídajícím sloupci pravých stran rovnic, se ovšem počítají normálně.

Vyplněním pole v pravém dolním rohu tabulky B (v našem příkladě pole 20) je eliminace skončena a zbývá ještě provést výpočet hodnot neznámých x_i pomocí t. zv. zpětné substituce. K té používáme už jen části tabulky B vpravo od diagonály. Vypočítané hodnoty x_i vyplňujeme postupně od prava do tabulky C. Číslo v poli 20 přímo udává hodnotu $x_4 = \langle 20 \rangle$. Hodnotu x_3 vypočítáme pomocí x_4 z třetího řádku v tabulce B takto: $x_3 = \langle 18 \rangle - \langle 17 \rangle \times x_4$. Podobně z druhého řádku bude $x_2 = \langle 14 \rangle - \langle 13 \rangle \times x_4 - \langle 12 \rangle \times x_3$ a konečně z prvního řádku $x_1 = \langle 8 \rangle - \langle 7 \rangle \times x_4 - \langle 6 \rangle \times x_3 - \langle 5 \rangle \times x_2$. Postup pro jiný počet n neznámých a rovnic je zcela analogický postupu pro zvolený příklad s $n = 4$.

Poznámka 3: Je-li třeba řešit několik soustav s touž maticí a s různými pravými stranami, připojíme k tabulce A vpravo sloupce všech uvažovaných pravých stran, k tabulce B připojíme rovněž příslušný počet dalších sloupců a k tabulce C příslušný počet řádků a řešíme pak všecky takové soustavy zároveň, neboť pro ně je celá tabulka B, kromě sloupce odpovídajícího pravým stranám, stejná.

Abychom se zabezpečili alespoň částečně proti chybám, vzniklým během výpočtu, používáme takovéto průběžné kontroly:

Kromě dané soustavy řešíme ještě pomocnou kontrolní soustavu, která se liší od dané soustavy jen pravými stranami a to tak, že v každé rovnici dané soustavy je přičten k hodnotě pravé strany ještě součet všech koeficientů této rovnice. (V našem příkladě tedy nová soustava má tvar

$$a_i y_1 + b_i y_2 + c_i y_3 + d_i y_4 = s_i \,,$$

kde

$$s_i = e_i + a_i + b_i + c_i + d_i \,, \quad i = 1, 2, 3, 4 \,.)$$

Kontrolní soustava má touž matici jako daná soustava. Budeme ji tedy řešit současně s danou soustavou podle poznámky 3 tak, že vedle pravé strany každé rovnice dané soustavy napíšeme ještě do přidaného sloupce v tabulce A součet všech koeficientů a pravé strany této rovnice. Odpovídající prvek, který z tohoto součtu dostaneme během eliminace v přidaném sloupci tabulky B, je při správném výpočtu roven (až na zaokrouhlovací chybu) součtu všech prvků v tabulce B, ležících s ním na tomtéž řádku vpravo od diagonály, zvětšenému o 1.

Při zpětné substituci používáme ke kontrole toho, že pro řešení x_i dané soustavy a řešení y_i kontrolní soustavy platí vztah $y_i = x_i + 1$ ($i = 1, 2, \ldots, n$). Po výpočtu každé hodnoty x_i tedy vždy hned vypočítáme příslušnou hodnotu y_i a zjistíme, je-li (až na zaokrouhlovací chybu) y_i o 1 větší než x_i.

Výhoda uvedeného schematu je hlavně v tom, že nezapisujeme zbytečně částečné výsledky při výpočtu skalárních součinů. To však na druhé straně klade zvýšené požadavky na pečlivost výpočtáře, neboť chyba, které se dopustí, se pak dosti obtížně hledá, což je nepříjemné zvláště pro velká n.

Při řešení větších soustav si je možno práci ještě usnadnit tím, že na př. hodnoty z polí pod diagonálou tabulky B se zapisují postupně na zvláštní proužek papíru v příslušném pořadí tak, aby po přiložení tohoto proužku papíru k příslušnému sloupci tabulky B přišla vedle sebe právě ta čísla, jejichž součiny je třeba postupně počítat. Také je možno na tomto proužku označit šipkou místo, na němž leží v tabulce A prvek, od kterého součiny odčítáme, po případě i poznámku o nutnosti dělení při výpočtu prvku vpravo od diagonály. Takovouto pomůcku uvádí ve své knize W. E. Milne. Jinak je také možno použít dvou proužků papíru, na nichž očíslované šipky směřují na jednom z nich k prvkům v řádcích a na druhém k prvkům ve sloupcích tak, že stejně očíslované šipky směřují (při správném přiložení k tabulce B) k prvkům, jejichž součiny máme počítat. Proužky přikládáme ve vzájemně kolmé poloze na tabulku B tak, aby první šipka vodorovného proužku směřovala k prvnímu prvku příslušného řádku a první šipka svislého k prvnímu prvku příslušného sloupce.

Pro ilustraci připojujeme numerický příklad, převzatý z citované knihy W. E. Milneho (str. 20). Je to vyřešení soustavy čtyř rovnic o čtyřech neznámých popsanou metodou. Je použito kontrolního součtového sloupce.

A	6,4375	2,1849	−3,7474	1,8822	4,6351	11,3923
	2,1356	5,2101	1,5220	−1,1234	5,2131	12,9574
	−3,7362	1,4998	7,6421	1,2324	5,8665	12,5046
	1,8666	−1,1104	1,2460	8,3312	4,1322	14,4656

B	6,4375	0,339402	−0,582120	0,292381	0,720016	1,769678
	2,1356	4,485273	0,616501	−0,389677	0,819445	2,046270
	−3,7362	2,767874	3,760786	0,904963	1,672125	3,577085
	1,8666	−1,743928	3,407719	4,022013	−0,368189	0,631814

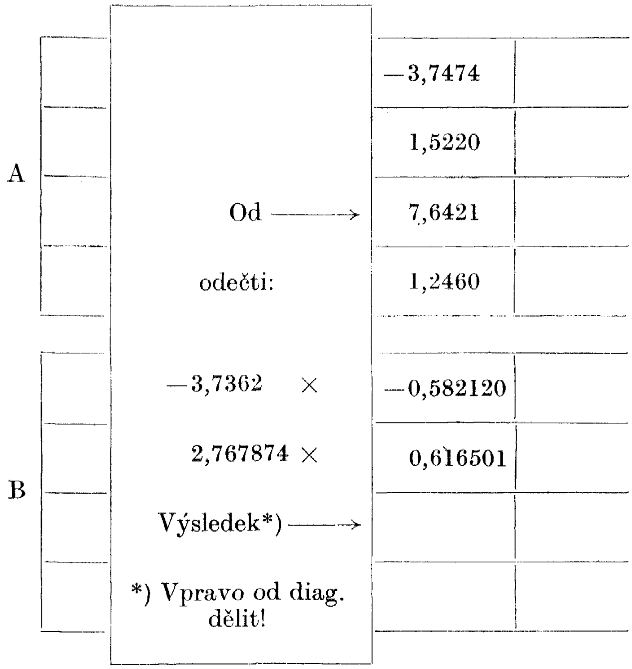
C	2,185177	−0,560313	2,005322	−0,368189
	3,185170	0,439692	3,005317	0,631814

Na dalších obrázcích je znázorněno použití pomocných proužků papíru při výpočtu prvku v poli 15 (v našem příkladě čísla 3,760786)

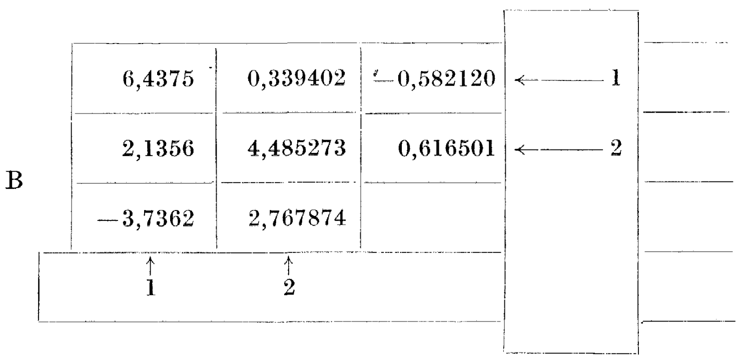
a) podle Milneho,

b) druhým uvedeným způsobem.

Poznámka 4: Akademik prof. dr VÁCLAV DAŠEK upozornil na další možné úpravy při postupu podle uvedené metody. Předně je možno při vyplňování tabulky B zapisovat všecky prvky v každém řádku vpravo od diagonály



a)



b)

s obráceným znaménkem, takže pak v předpise pro výpočet prvků v tabulce B se změní *odečítání* součinů dvojic prvků na *přičítání* těchto součinů. To může usnadnit výpočtáři manipulaci se znaménky.

Další úprava se vztahuje k poznámce 2, týkající se zjednodušení výpočtu pro soustavy se symetrickou maticí. Akademik V. Dašek navrhuje připojit k matici takovéto soustavy v tabulce A další řádek, sestavený ze stejných hodnot jako sloupec pravých stran soustav, takže pak celá tabulka A (i s pravými stranami a přidaným řádkem) představuje symetrickou matici řádu o 1 vyššího (s nulou v posledním poli vpravo dole). K tabulce B se rovněž připojí jeden řádek. Při vyplňování tabulky B pak je možno použít postupu, uvedeného v poznámce 2, i pro výpočet prvků v posledním sloupci této tabulky, takže celý postup je zcela jednotný. Analogicky lze rozšířit symetrickou matici zároveň o několik řádků, řešíme-li zároveň několik soustav s touž maticí a různými pravými stranami.

LITERATURA

[1] *Banachiewicz, T.*: Méthode de résolution numérique des équations linéaires, ... , Bull. Int. de l'Ac. Polon., Cl. des Sc. Math. et Natur., Série A, Sc. Math., 1938.

[2] *Фаддеева, В. Н.*: Вычислительные методы линейной алгебры, Москва 1950.

[3] *Milne W. E.*: Numerical calculus (Approximations, Interpolation, Finite Differences, Numerical Integration and Curve Fitting), Princeton 1949.

[4] *Pokorná O.*: Řešení soustav lineárních algebraických rovnic. Přehled a srovnání metod. Stroje na zpracování informací, Sborník III (str. 139—196), Praha 1955.