Otto Hanš

Poznámka k negativnímu binomickému rozložení

Aplikace matematiky, Vol. 2 (1957), No. 3, 222--226

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/102571

POZNÁMKA K NEGATIVNÍMU BINOMICKÉMU ROZLOŽENÍ

OTTO HANŠ

(Došlo dne 23. února 1956.) DT:519.271

V článku je podána metoda usnadňující výpočet distribuční funkce negativního binomického rozložení pro různé hodnoty parametrů.

Řešení praktických problémů metodami počtu pravděpodobnosti vede někdy na t. zv. negativní binomické rozložení, jehož distribuční funkce $F(n; \beta, p)$ je dána výrazem

$$F(n; \beta, p) = \sum_{k=0}^{n-1} f(k; \beta, p) = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{\beta + k - 1}{k} p^{\beta} q^k . \tag{1}$$

Na příklad pravděpodobnost, že z dostatečně velké partie výrobků o $100p$ procentech zmetků vytáhneme při provádění postupného výběru po jednom výrobku dříve β-tý zmetek než n-tý dobrý výrobek, je dána výrazem (1). Rovněž v případě t. zv. složeného rozložení, kdy v Poissonově rozložení

$$P\{v = k/\lambda = \lambda_0\} = e^{-a\lambda_0} \frac{(a\lambda_0)^k}{k!}$$

je parametr λ náhodná proměnná, jež má Γ-rozložení

$$P\{\lambda < \lambda_0\} = \int_0^{\lambda_0} \frac{\alpha^\beta}{\Gamma(\beta)} \lambda^{\beta-1} e^{-\alpha\lambda} \, d\lambda ,$$

je výsledná pravděpodobnost $P\{v < n\}$ rovna

$$P\{v < n\} = \sum_{k=0}^{n-1} P\{v = k\} = F(n; \beta, p) ,$$

kde

$$p = \frac{\alpha}{a + \alpha}$$

a tedy

$$q = \frac{a}{a + \alpha} .$$

Negativní binomické rozložení má také zajímavé použití ve statistikách úrazovosti a nemocnosti a při problémech souvisejících s počtem jedinců určitého druhu ve výběrech. (Viz na př. [1], str. 437.)

Uvedeme nyní dvě věty, jež lze často s výhodou použít při výpočtu „kraje" negativního binomického rozložení.

Věta 1. *Pro „kraj" negativního binomického rozložení platí relace*

$$\sum_{k=n}^{\infty} \binom{\beta + k - 1}{k} p^\beta q^k = \sum_{j=0}^{r-1} \binom{n + \varepsilon + j - 1}{n - 1} p^{j+\varepsilon} q^n + Z\,, \tag{2}$$

kde zbytek Z splňuje nerovnost

$$0 \leq Z \leq \varepsilon(\varepsilon + 1) \frac{q^n}{p^{1-\varepsilon}}\,,$$

při čemž n a r jsou přirozená čísla, $\beta = r + \varepsilon$, $0 \leq \varepsilon < 1$.

Výhoda věty 1 pro $\beta < n$ je zřejmá, neboť počet operací je v tomto případě menší. Protože při výpočtu pracujeme téměř vždy s přibližnými čísly, bývá obvykle maximální chyba výsledku získaného výše popsanou metodou menší než maximální chyba výsledku počítaného přímo.

Věta 1 aproximuje „kraj" negativního binomického rozložení „krajem" jiného negativního binomického rozložení. Výsledkem podobného charakteru, který převádí „kraj" negativního binomického rozložení beze zbytku na „kraj" binomického rozložení je následující

Věta 2. *Pro „kraj" negativního binomického rozložení platí relace*

$$\sum_{j=0}^{c} \binom{\beta + j - 1}{j} p^\beta q^j = \sum_{j=0}^{c} \binom{\beta + c}{j} p^{\beta + c - j} q^j\,. \tag{3}$$

Výhoda této úpravy výpočtu „kraje" negativního binomického rozložení spočívá v tom, že lze k výpočtu použít dosti rozsáhlých tabulek [2]. Také otázky limitních tvarů negativního binomického rozložení jsou tím převedeny na otázky limitních tvarů binomického rozložení, jež jsou v literatuře dostatečně propracovány.

Poznámka. Pro celočíselné hodnoty parametru β, kde $Z = 0$, lze obě věty dokázat bez jakýchkoliv výpočtů přímo následující úvahou:

Mějme osudí a v něm bílé a černé koule v poměru $p : q$ a konejme tahy s vracením. Jestliže pravděpodobnost vytažení je pro každou kouli stejná, potom $\sum_{k=n}^{\infty} \binom{\beta + k - 1}{k} p^\beta q^k$ značí pravděpodobnost, že β-tou bílou kouli vytáhnu nejdříve po n-té černé a $\sum_{j=0}^{\beta-1} \binom{n + j - 1}{n - 1} p^j q^n$ značí pravděpodobnost, že n-tou černou kouli vytáhnu nejpozději po $(\beta - 1)$-vé bílé. Je zřejmé, že obě pravděpodobnosti jsou stejné.

Rovněž tak pravděpodobnost $\sum_{j=0}^{c} \binom{\beta + j - 1}{j} p^\beta q^j$, že c-tou černou kouli vytáhnu nejdříve po β-té bílé a pravděpodobnost $\sum_{j=0}^{c} \binom{\beta + c}{j} p^{\beta + c - j} q^j$, že z $\beta + c$ s vracením vybraných koulí bude nejvýše c koulí černých, jsou stejné.

Dokážeme nyní obě věty pro libovolnou hodnotu parametru β.

Důkaz věty 1. Použitím vztahu $\beta = r + \varepsilon$ a přepsáním kombinačních čísel pomocí Γ-funkcí dostáváme

$$\sum_{k=n}^{\infty} \binom{\beta + k - 1}{k} p^\beta q^k = \sum_{k=n}^{\infty} q^k p^\varepsilon \left[\frac{\Gamma(k + r + \varepsilon)\, p^r}{\Gamma(k + 1)\, \Gamma(r + \varepsilon)}\right],$$

kde výraz v hranaté závorce lze přepsat ve formě rozdílu dvou sum jako

$$\sum_{k=n}^{\infty} q^k p^\varepsilon \left\{\sum_{j=0}^{r-1} \frac{\Gamma(k + \varepsilon + j + 1)\, p^{j+1}}{\Gamma(k + 1)\, \Gamma(j + \varepsilon + 1)} - \sum_{i=0}^{r-2} \frac{\Gamma(k + \varepsilon + i + 1)\, p^{i+1}}{\Gamma(k + 1)\, \Gamma(i + \varepsilon + 1)}\right\},$$

které je možno transformací $i + 1 = j$ opět částečně sloučit na

$$\sum_{k=n}^{\infty} q^k p^\varepsilon \left\{\sum_{j=0}^{r-1} p^j \left[\frac{\Gamma(k + \varepsilon + j + 1)\, p}{\Gamma(k + 1)\, \Gamma(j + \varepsilon + 1)} - \frac{\Gamma(k + \varepsilon + j)}{\Gamma(k + 1)\, \Gamma(j + \varepsilon)}\right] + \frac{\Gamma(k + \varepsilon)}{\Gamma(k + 1)\, \Gamma(\varepsilon)}\right\}.$$

Nyní dosadíme $p = 1 - q$

$$\sum_{k=n}^{\infty} q^k p^\varepsilon \left\{\sum_{j=0}^{r-1} p^j \left[\left(\frac{\Gamma(k + \varepsilon + j + 1)}{\Gamma(k + 1)\, \Gamma(j + \varepsilon + 1)} - \frac{\Gamma(k + j + \varepsilon)}{\Gamma(k + 1)\, \Gamma(j + \varepsilon)}\right) - \right.\right.$$
$$\left.\left. - \frac{\Gamma(k + \varepsilon + j + 1)\, q}{\Gamma(k + 1)\, \Gamma(j + \varepsilon + 1)}\right] + \frac{\Gamma(k + \varepsilon)}{\Gamma(k+1)\, \Gamma(\varepsilon)}\right\}$$

a sloučíme členy v oblé závorce, což vede na výraz

$$\sum_{k=n}^{\infty} q^k p^\varepsilon \left\{\sum_{j=0}^{r-1} p^j \left[\binom{k + \varepsilon + j - 1}{k - 1} - \binom{k + \varepsilon + j}{k} q\right] + \frac{\Gamma(k + \varepsilon)}{\Gamma(k + 1)\, \Gamma(\varepsilon)}\right\},$$

u kterého můžeme zaměnit pořadí výpočtu sum. Dostáváme

$$\sum_{j=0}^{r-1} p^{j+\varepsilon} \left\{\sum_{k=0}^{\infty} \binom{k + \varepsilon + j - 1}{k - 1} q^k - \sum_{k=n}^{\infty} \binom{k + \varepsilon + j}{k} q^{k+1}\right\} +$$
$$+ \sum_{k=n}^{\infty} \frac{\Gamma(k + \varepsilon)}{\Gamma(k + 1)\, \Gamma(\varepsilon)} q^k p^\varepsilon$$

a dále provedením ve svorkách naznačeného rozdílu

$$\sum_{j=0}^{r-1} p^{j+\varepsilon} \binom{n + \varepsilon + j - 1}{n - 1} q^n + \sum_{k=n}^{\infty} \frac{\Gamma(k + \varepsilon)}{\Gamma(k + 1)\, \Gamma(\varepsilon)} q^k p^\varepsilon$$

odkud plyne, že

$$Z = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{\Gamma(k + \varepsilon)}{\Gamma(k + 1)\, \Gamma(\varepsilon)} q^k p^\varepsilon$$

a tedy jednoduchou úpravou

$$0 \leq Z = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{\Gamma(k+\varepsilon)}{\Gamma(k+1)} \frac{(\varepsilon+1)\,\varepsilon}{(\varepsilon+1)\,\varepsilon\,\Gamma(\varepsilon)} q^k p^\varepsilon \leq$$

$$\leq \sum_{k=n}^{\infty} \frac{\varepsilon(\varepsilon+1)}{\Gamma(2+\varepsilon)} q^k p^\varepsilon \leq \sum_{k=n}^{\infty} (\varepsilon+1)\,\varepsilon q^k p^\varepsilon = \varepsilon(\varepsilon+1)\, p^{\varepsilon-1} q^n ,$$

čímž je věta 1 dokázána.

Důkaz věty 2. Dokažme nejprve, že pro $k \leq n$ platí

$$\sum_{j=0}^{n} \binom{\beta+n}{j} p^{\beta+n-j} q^j - \sum_{j=0}^{n-1} \binom{\beta+n-1}{j} p^{\beta+n-j-1} q^j =$$

$$= \sum_{j=k}^{n} \binom{\beta+n}{j} p^{\beta+n-j} q^j - \sum_{j=k}^{n-1} \binom{\beta+n-1}{j} p^{\beta+n-j-1} q^j - \binom{\beta+n-1}{k-1} p^{\beta+n-k} q^k . \tag{4}$$

Pro $k = 0$ je vztah (4) správný. Předpokládejme, že platí pro $k - 1$, t. zn. že platí

$$\sum_{j=0}^{n} \binom{\beta+n}{j} p^{\beta+n-j} q^j - \sum_{j=0}^{n-1} \binom{\beta+n-1}{j} p^{\beta+n-j-1} q^j =$$

$$= \sum_{j=k-1}^{n} \binom{\beta+n}{j} p^{\beta+n-j} q^j - \sum_{j=k-1}^{n-1} \binom{\beta+n-1}{j} p^{\beta+n-j-1} q^j -$$

$$- \binom{\beta+n-1}{k-2} p^{\beta+n-k+1} q^{k-1} .$$

Osamostatněním členů pro $j = k - 1$ dostáváme výraz

$$\sum_{j=0}^{n} \binom{\beta+n}{j} p^{\beta+n-j} q^j - \sum_{j=0}^{n-1} \binom{\beta+n-1}{j} p^{\beta+n-j-1} q^j =$$

$$= \sum_{j=k}^{n} \binom{\beta+n}{j} p^{\beta+n-j} q^j - \sum_{j=k}^{n-1} \binom{\beta+n-1}{j} p^{\beta+n-j-1} q^j +$$

$$+ \binom{\beta+n}{k-1} p^{\beta+n-k+1} q^{k-1} - \binom{\beta+n-1}{k-1} p^{\beta+n-k} q^{k-1} -$$

$$- \binom{\beta+n-1}{k-2} p^{\beta+n-k+1} q^{k-1} ,$$

který jednoduchou úpravou přejde na tvar (4), jenž tedy platí pro všechna $k \leq n$. Obraťme se nyní k rovnosti (3), která pro $c = 0$ přechází v identitu $p^\beta = p^\beta$ a předpokládejme, že rovnost (3) platí pro všechna $c \leq n - 1$. Můžeme tedy psát

$$\sum_{j=0}^{n} \binom{\beta+n}{j} p^{\beta+n-j} q^j = \sum_{j=0}^{n} \binom{\beta+n}{j} p^{\beta+n-j} q^j +$$

$$+ \sum_{j=0}^{n-1} \binom{\beta+j-1}{j} p^\beta q^j - \sum_{j=0}^{n-1} \binom{\beta+n-1}{j} p^{\beta+n-j-1} q^j ,$$

což lze podle vztahu (4) volbou $k = n$ psát ve tvaru

$$\sum_{j=0}^{n} \binom{\beta + n}{j} p^{\beta+n-j} q^j = \sum_{j=0}^{n-1} \binom{\beta + j - 1}{j} p^\beta q^j + \binom{\beta + n}{n} p^\beta q^n - \binom{\beta + n - 1}{n - 1} p^\beta q^n .$$

Provedením naznačeného rozdílu dostáváme ihned (3) a tím je věta 2 dokázána.

LITERATURA

[1] *H. Cramér*: Mathematical Methods of Statistics. New York 1946.

[2] *K. Pearson*: Tables of the Incomplete B—function. Cambridge University Press 1934.

Резюме

ЗАМЕТКА К ОТРИЦАТЕЛЬНОМУ БИНОМИАЛЬНОМУ РАСПРЕДЕЛЕНИЮ

ОТТО ХАНШ (Otto Hanš)

(Поступило в редакцию 23/II 1956 г.)

В этой статье выведена одна приближенная (2) и одна точная (3) формула для „хвостов" отрицательного биномиального распределения.

Summary

A NOTE ON NEGATIVE BINOMIAL DISTRIBUTION

OTTO HANŠ

(Received February 23, 1956.)

In this paper there are given two formulae for „tails" of negative binomial distribution, an approximate (2) and an exact (3).