Miroslav Fiedler

Numerické řešení algebraických rovnic Bernoulli-Whittakerovou metodou

Aplikace matematiky, Vol. 2 (1957), No. 4, 321--326

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/102581

NUMERICKÁ PRAXE

NUMERICKÉ ŘEŠENÍ ALGEBRAICKÝCH ROVNIC BERNOULLI-WHITTAKEROVOU METHODOU

MIROSLAV FIEDLER

Je popsána Bernoulli-Whittakerova methoda řešení algebraické rovnice, spočívající v postupném výpočtu kořenů o největší absolutní hodnotě. Methoda je jednoduchá a účinná zejména pro rovnice, jejichž kořeny (reálné nebo komplexní) mají absolutní hodnoty značně odlišné.

1. Pišme danou algebraickou rovnici n-tého stupně ve tvaru

$$x^n = a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_n \,. \tag{1}$$

Počítejme postupně čísla $u_1, u_2, \ldots$ z daných

$$u_0 = 1 \,, \quad u_{-1} = u_{-2} = \ldots = u_{-n+1} = 0$$

pomocí rekurentního vztahu ($m \geq 1$)

$$u_m = a_1 u_{m-1} + a_2 u_{m-2} + \ldots + a_n u_{m-n} \,. \tag{2}$$

Potom platí (viz na př. Householder [1]):

I. Má-li (1) právě jeden kořen α o největší absolutní hodnotě[1]), potom pro všechna dosti velká r platí přibližně

$$\alpha = \frac{u_r}{u_{r-1}} \,, \tag{3}$$

čili α je přibližně kořenem rovnice

$$\begin{vmatrix} x & 1 \\ u_r & u_{r-1} \end{vmatrix} = 0 \;^{2)} \tag{4}$$

(t. j. $u_{r-1}x - u_r = 0$).

II. Má-li (1) právě dva kořeny α_1, α_2 o největší absolutní hodnotě, pak α_1, α_2 jsou přibližně dvojicí kořenů rovnice

$$\begin{vmatrix} x^2 & x & 1 \\ u_{r+1} & u_r & u_{r-1} \\ u_{r+2} & u_{r+1} & u_r \end{vmatrix} = 0 \;^{2)} \tag{5}$$

[1]) Platí-li pro kořeny $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ rovnice (1) $|\alpha_1| = |\alpha_2| = \ldots = |\alpha_r| > |\alpha_{r+1}| \geq \ldots \geq |\alpha_n|$, říkáme, že rovnice (1) má r kořenů o největší absolutní hodnotě.

[2]) S determinanty se čtenář seznámí na př. v knize *B. Bydžovský, Úvod do theorie determinantů a matic a jejich užití, Praha 1947.*

(čili $(u_r^2 - u_{r-1}u_{r+1})x^2 + (u_{r-1}u_{r+2} - u_r u_{r+1})x + u_{r+1}^2 - u_r u_{r+2} = 0)$ pro všechna dosti velká r.

Poznámka. I. a II. lze zobecnit i na (méně častý) případ, že (1) má právě $m > 2$ kořenů o největší absolutní hodnotě. Příslušná rovnice vznikne zřejmým zobecněním (4) a (5).

2. Předchozích vztahů lze užít k numerickému řešení algebraické rovnice (1). Postupujeme takto:

Podle (2) vypočteme čísla u_k až do u_{20} včetně. Přitom je výhodné napsat koeficienty $a_1, \ldots, a_n$ v obráceném pořadí „svisle“ pod sebou na proužek papíru, který posouváme podél svisle psané posloupnosti již vypočtených u_k: tak pro $n = 4$ v poloze

$$\begin{array}{|c|c} \hline & u_0 \\ a_4 & u_1 \\ a_3 & u_2 \\ a_2 & u_3 \\ a_1 & u_4 \\ \hline \cdot\, r & u_5 \\ \hline \end{array}$$

vypočteme $u_5 = a_4u_1 + a_3u_2 + a_2u_3 + a_1u_4$.

U posledních pěti ($r = 16, \ldots, 20$) vypočteme podíly

$$q_r = \frac{u_r}{u_{r-1}}\ ^{3)}\ , \tag{6}$$

A. Jestliže se čísla $q_{16}, \ldots, q_{20}$ navzájem mnoho neliší (dvě následující o 2–3%, jak se ukazuje v praxi), usuzujeme, že nastal případ I. a považujeme q_{20} za přibližnou hodnotu kořene α. Přitom jestliže se čísla $q_{16}, \ldots, q_{20}$ sice liší (do 10%), ale chovají se dost pravidelně, je možno vypočíst ještě asi deset dalších u_k a provádět uvedené kroky pro $u_{25}, \ldots, u_{30}$.

B. Jestliže se $q_{16}, \ldots, q_{20}$ navzájem dost liší, vypočteme pro $r = 15, \ldots, 19$ determinanty

$$\Delta_r = \begin{vmatrix} u_r & u_{r-1} \\ u_{r+1} & u_r \end{vmatrix} = u_r^2 - u_{r-1}u_{r+1} \tag{7}$$

a jejich podíly

$$Q_r = \frac{\Delta_r}{\Delta_{r-1}}\ ^{4)} \tag{8}$$

pro $r = 16, \ldots, 19$.

---

3) Pro $u_{r-1} \neq 0$. Je-li některé $u_{r-1} = 0$, přejdeme ihned k dalšímu případu B.

4) Pro $\Delta_{r-1} \neq 0$. Je-li některé $\Delta_{r-1} = 0$, přejdeme k dalšímu případu C.

Jsou-li čísla $Q_{16}, \ldots, Q_{19}$ již navzájem blízká, usuzujeme, že nastal případ II. Sestrojíme rovnici (5) pro $r = 18$[5]) a považujeme její kořeny za přibližné hodnoty kořenů rovnice (1).

C. Může se ovšem stát, že jak čísla $q_{16}, \ldots, q_{20}$, tak i čísla $Q_{16}, \ldots, Q_{20}$ se navzájem dost liší. Potom má rovnice (1) alespoň tři kořeny o největší absolutní hodnotě nebo o absolutních hodnotách jí blízkých. Lze pak buď postupovat analogicky dále (podle poznámky za II.)[6]), anebo přejít substitucí

$$x = y + u \tag{9}$$

do (1) k nové rovnici v y o kořenech $\alpha_i - u$, kde α_i jsou kořeny (1).

V obou těchto případech A, B[7]) pak dělíme (viz následující Dodatek) polynom $x^n - a_1x^{n-1} - \ldots - a_n$: v prvním případě $x - \alpha$, v druhém levou stranou (5). Výsledný podíl (zbytek má být velmi malý!) je polynom stupně $n - 1$ nebo $n - 2$, jehož kořeny jsou přibližně zbylé kořeny rovnice (1). Pro tento polynom celý postup od začátku opakujeme, dokud nedostaneme polynom druhého nebo prvního stupně.

3. Předností Bernoulli-Whittakerovy methody je jednak její jednoduchost, jednak to, že případné chyby při výpočtu posloupnosti (2) ztrácejí po n krocích prakticky vliv na výsledek, a přitom ani zaokrouhlovací chyby výpočet příliš nezatěžují. Doporučuje se však zejména poslední čísla u_{15} až u_{20} počítat co nejpřesněji (nejméně o tři desetinná místa přesněji než je požadovaná přesnost kořenů).

Oproti na př. Gräffeho methodě má Bernoulli-Whittakerova methoda nevýhodu v pomalejší konvergenci posloupnosti (2). Mají-li (při reálných koeficientech) reálné kořeny resp. dvojice komplexně sdružených kořenů absolutní hodnoty postupně od největší k nejmenší $r_1 > r_2 > \ldots > r_i > 0$, a přitom poměry $\frac{r_1}{r_2}, \frac{r_2}{r_3}$ atd. jsou stále větší než asi 1,3, potom nenastanou v methodě potíže. Jsou-li však někdy aspoň tři kořeny o přibližně stejné absolutní hodnotě, nastane v příslušném kroku případ C, který výpočet komplikuje.

Potřebujeme-li znát kořeny přesně, najdeme je ovšem známou Newtonovou methodou z vypočtených aproximací kořenů.

Dodatek

Dělit polynom $c(x) = c_0x^n + c_1x^{n-1} + \ldots + c_n$ polynomem $d(x) = d_0x^k + d_1x^{k-1} + \ldots + d_k$ znamená najít polynomy $p(x)$ (částečný podíl) a $r(x)$ (zbytek) tak, aby

$$c(x) = p(x)\, d(x) + r(x)\,,$$

a přitom aby stupeň $r(x)$ byl menší než stupeň $d(x)$.

---

[5]) Koeficient u x^2 a absolutní člen jsou již vypočtená čísla Δ_{18} a Δ_{19}.

[6]) Je pak ovšem nutno řešit rovnici aspoň třetího stupně, která má kořeny o skoro stejné absolutní hodnotě. To lze učinit podle článku *M. Fiedler, Numerické řešení algebraických rovnic, které mají kořeny o skoro stejné absolutní hodnotě, Apl. mat. 1 (1956), 4—22.*

[7]) Analogicky se postupuje i v případě C, jestliže jsme pokračovali podle poznámky za II.

Numericky se dělení provádí velmi jednoduše takto:

Budiž nejprve $d_0 = 1$ a pišme $d(x)$ ve tvaru

$$x^k - v_1 x^{k-1} - \ldots - v_k$$

Na pomocný proužek papíru si napíšeme čísla v_i v obráceném pořadí do sloupce: $v_k, \ldots, v_1$. Koeficienty $c_0, c_1, \ldots, c_n$ napíšeme pod sebou do sloupce. Do sousedního sloupce vpravo budeme vepisovat koeficienty $p_0, \ldots, p_{n-k}$ podílu $p(x) = p_0 x^{n-k} + p_1 x^{n-k-1} + \ldots + p_{n-k}$ a $r_{n-k+1}, \ldots, r_n$ zbytku $r(x) = r_{n-k+1} x^{k-1} + \ldots + r_n$. Výpočet provádíme tak, že napíšeme do prvního řádku číslo p_0 rovné c_0; přiložíme pomocný proužek zleva na sloupec c tak, že v_1 je ve stejném řádku jako p_0, vynásobíme $v_1 p_0$ a přičteme c_1 (t. j. první číslo ve sloupci c, které je vidět pod pomocným sloupcem). Výsledek $p_1 = v_1 p_0 + c_1$ napíšeme pod p_0. Proužek posuneme o jeden řádek níže, vypočteme $v_2 p_0 + v_1 p_1 + c_2 = p_2$ a vepíšeme p_2 pod p_1 (nevyskytuje-li se už v_2, počítáme ovšem jen $v_1 p_1 + c_2 = p_2$). Takto pokračujeme, dokud nevypočteme všechna p_i až do p_{n-k} včetně. Potom pod p_{n-k} uděláme vodorovnou čáru (můžeme ji udělat předem!) a počítáme koeficienty r_i zbytku úplně obdobně, jen s tím rozdílem, že násobíme čísly v_i jen čísla p_j, t. j. čísla nad vodorovnou čarou) a ne už vypočtená r_j. Tak na př. pro $n = 6$, $k = 2$, má-li proužek polohu I., vypočteme

$$p_3 = v_2 p_1 + v_1 p_2 + c_3 ,$$

má-li polohu II., pak $r_6 = v_2 p_4 + c_6$:

I.			II.	
c_0	p_0		c_0	p_0
$\boxed{v_2}$	p_1		c_1	p_1
$\boxed{v_1}$	p_2		c_2	p_2
c_3	p_3		c_3	p_3
c_4	$\underline{p_4}$		$\boxed{v_2}$	$\underline{p_4}$
c_5	r_5		$\boxed{v_1}$	r_5
c_6	r_6		c_6	r_6

Je-li v polynomu $d(x)$ $d_0 \neq 1$, dělíme nejprve $c(x)$ polynomem $\frac{1}{d_0} d(x)$ (který má uvedený tvar); výsledný částečný podíl násobíme (hledáme-li jen jeho kořeny, není to ovšem potřeba) číslem d_0. Zbytek $r(x)$ ponecháme beze změny.

Numerický příklad

Řešme touto methodou rovnici

$$x^4 = 4x^3 + 10{,}64x^2 + 2{,}96x - 34{,}03 .$$

Dostaneme popsaným způsobem

i	u_i	i	u_i
0	1,0	11	$1{,}8346 \cdot 10^8$
1	4,0	12	$1{,}05649 \cdot 10^9$
2	$2{,}664 \cdot 10^1$	13	$6{,}08403 \cdot 10^9$
3	$1{,}5208 \cdot 10^2$	14	$3{,}50361 \cdot 10^{10}$
4	$8{,}6958 \cdot 10^2$	15	$2{,}01763 \cdot 10^{11}$
5	$5{,}0392 \cdot 10^3$	16	$1{,}16189 \cdot 10^{12}$
6	$2{,}8953 \cdot 10^4$	17	$6{,}69100 \cdot 10^{12}$
7	$1{,}6683 \cdot 10^5$	18	$3{,}85315 \cdot 10^{13}$
8	$9{,}6069 \cdot 10^5$	19	$2{,}21892 \cdot 10^{14}$
9	$5{,}5320 \cdot 10^6$	20	$1{,}27781 \cdot 10^{15}$
10	$3{,}1858 \cdot 10^7$		

$$q_{16} = 5{,}75872$$
$$q_{17} = 5{,}75870$$
$$q_{18} = 5{,}75871$$
$$q_{19} = 5{,}75871$$
$$q_{20} = 5{,}75870$$

Nastal případ A: přibližná hodnota jediného kořene o největší absolutní hodnotě je $\alpha_1 = 5{,}7587$. Dělíme podle Dodatku $x^4 - 4x^3 + 10{,}64x^2 - 2{,}95x + 34{,}03$ polynomem $x - 5{,}7587$:

$\boxed{5{,}7587}$		
	1,00	1,00
	−4,00	1,7587
	−10,64	−0,5122
	−2,96	−5,9096
	34,03	−0,0016

Podíl je tedy polynom $x^3 + 1{,}7587x^2 - 0{,}5122x - 5{,}9096$.

Dále řešíme rovnici

$$x^3 = -1{,}7587x^2 + 0{,}5122x + 5{,}9096\,.$$

i	u_i	i	u_i
0	1,0	11	$-2{,}2183 \cdot 10^3$
1	−1,7587	12	$2{,}6202 \cdot 10^3$
2	3,6052	13	$8{,}26180 \cdot 10^2$
3	−1,3317	14	$-1{,}32200 \cdot 10^4$
4	−6,2046	15	$3{,}91577 \cdot 10^4$
5	$3{,}1535 \cdot 10^1$	16	$-7{,}07555 \cdot 10^4$
6	$-6{,}6509 \cdot 10^1$	17	$6{,}63693 \cdot 10^4$
7	$9{,}6455 \cdot 10^1$	18	$7{,}84415 \cdot 10^4$
8	$-1{,}7340 \cdot 10^1$	19	$-5{,}22097 \cdot 10^5$
9	$-3{,}1314 \cdot 10^2$	20	$1{,}35061 \cdot 10^6$
10	$1{,}1118 \cdot 10^3$		

Poněvadž $q_{19} = -6,6559$, $q_{20} = -2,58689$, nenastane případ A. Vypočteme tedy

i	Δ_i	Q_i
15	$5,97935 \cdot 10^8$	
16	$2,40747 \cdot 10^9$	4,02631
17	$9,95505 \cdot 10^9$	4,13506
18	$4,08043 \cdot 10^{10}$	4,09885
19	$1,66642 \cdot 10^{11}$	4,08393

Nastane proto případ B. Dva kořeny o největší absolutní hodnotě uvedené rovnice třetího stupně (a tedy přibližně další dva kořeny původní rovnice) vyhovují přibližně rovnici (5), která vyjde ve tvaru

$$4,08043 \cdot 10^{10}x^2 + 1,30593 \cdot 10^{11}x + 1,66642 \cdot 10^{11} = 0\,,$$

čili

$$x^2 + 3,2005x + 4,0839 = 0\,.$$

Tedy $\alpha_{2,3} = -1,6003 \pm 1,2341i$.

Poslední kořen najdeme dělením:

$x^3 + 1,7587x^2 - 0,5122x - 5,9096$ polynomem $x^2 + 3,2005x + 4,0839$:

$$\begin{array}{|r|}\hline -4,0839 \\ -3,2005 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{rr} 1,00 & 1,00 \\ 1,7587 & -1,4418 \\ \cline{2-2} -0,5122 & 0,0184 \\ -5,9096 & -0,0214 \end{array}$$

Podíl je $x - 1,4418$ a

$$\alpha_4 = 1,4418\,.$$

Pro srovnání uvádíme přesnější hodnoty kořenů:

$$\alpha_1 = 5,75870, \quad \alpha_{2,3} = -1,60000 \pm 1,24097i\,, \quad \alpha_4 = 1,44130\,.$$

LITERATURA

[1] *Householder A. S.,* Principles of Numerical Analysis, N. York 1953.