Jaroslav Kautský

Řešení quasilineární parabolické diferenciální rovnice s absolutním členem speciálního typu metodou sítí

Aplikace matematiky, Vol. 2 (1957), No. 5, 327–341

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/102584`

ČLÁNKY

ŘEŠENÍ QUASILINEÁRNÍ PARABOLICKÉ DIFERENCIÁLNÍ ROVNICE S ABSOLUTNÍM ČLENEM SPECIÁLNÍHO TYPU METODOU SÍTÍ

JAROSLAV KAUTSKÝ

(Došlo dne 2. dubna 1957.) DT: 517.947.43

Obsahem této práce je důkaz existence a jednoznačnosti řešení prvé okrajové úlohy pro quasilineární parabolickou diferenciální rovnici s absolutním členem speciálního typu a důkaz konvergence síťového řešení.

1. Úvod

Matematická analysa tepelných dějů v masivním betonu vede na speciální tvar rovnice pro vedení tepla. Zdrojem tepla (matematicky popsaným absolutním členem v rovnici) je exothermická chemická reakce probíhající při tvrdnutí betonu (vývin hydratačního tepla). Rychlost této reakce, tedy také intensita zdroje, závisí též na teplotě prostředí, ve kterém reakce probíhá, a na množství vyhydratovaného cementu, jakožto produktu uvedené chemické reakce. Toto množství je úměrné množství již vyvinutého tepla.

Označíme-li absolutní člen v rovnici pro vedení tepla f, vyjádříme žádaný fakt tím, že funkce f bude v čase t záviset též na $\int\limits_0^t f(\tau)\, \mathrm{d}\tau$, který je úměrný množství již vyvinutého tepla. Jest tedy naší úlohou najíti při daných počátečních a okrajových podmínkách řešení systému rovnic

$$\frac{\partial u}{\partial t} = g(x, t, u(x, t)) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + h(x, t, u(x, t)) \frac{\partial u}{\partial x} + f(x, t, u(x, t), y(x, t)) , \tag{1}$$

$$\frac{\partial y}{\partial t} = f(x, t, u(x, t), y(x, t)) , \tag{2}$$

neboť při počáteční podmínce $y(x, 0) = 0$ je rovnice (2) ekvivalentní s rovnicí

$$y(x, t) = \int\limits_0^t f(x, \tau, u(x, \tau), y(x, \tau))\, \mathrm{d}\tau . \tag{3}$$

Důkaz existence řešení takového systému lze výhodně provést metodou sítí.

2. Základní věty

Věta 1 (existenční). *Označme* $Q = \langle 0, 1\rangle \times \langle 0, T\rangle$, $Q_1 = Q \times I_1$, $Q_2 = Q_1 \times I_2$, *kde* $T \in (0, \infty)$, I_1 a I_2 *jsou omezené uzavřené intervaly.*

Nechť $p(x)$ *je funkce definovaná na* $\langle 0, 1\rangle$, *která má třetí derivaci splňující Lipschitzovu podmínku (dále L. p.), nechť* $r_0(t)$, $r_1(t)$ *jsou funkce definované na* $\langle 0, T\rangle$, *které mají derivaci splňující L. p. Nechť* $g(x_1, x_2, x_3)$ *a* $h(x_1, x_2, x_3)$ *jsou funkce na* Q_1, *které splňují L. p. vzhledem k* x_1 *a mají parciální derivace dle* x_2 a x_3 *splňující L. p. vzhledem k* x_2 *a* x_3. *Nechť* $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ *je funkce na* Q_2, *která splňuje L. p. vzhledem k* x_1 *a má parciální derivace dle* x_2, x_3 *a* x_4 *splňující L. p. vzhledem k* x_2, x_3 *a* x_4. *Nechť* $g(x_1, x_2, x_3)$ *je na* Q_1 *zdola omezena kladnou konstantou. Nechť funkce* $g(x, 0, p(x))$, $h(x, 0, p(x))$ *a* $f(x, 0, p(x), 0)$ *mají na* $(0, 1)$ *derivaci splňující L. p.*

Nechť dále platí

$$|x_3| \leq \max_{\substack{x\in\langle 0,1\rangle \\ t\in\langle 0,T\rangle}} (|p(x)|, |r_{0,1}(t)|) + T \max_{Q_2} |f(x_1, x_2, x_3, x_4)| \Rightarrow x_3 \in I_1\,, \tag{4}$$

$$|x_4| \leq T \max_{Q_2} |f(x_1, x_2, x_3, x_4)| \Rightarrow x_4 \in I_2\,, \tag{5}$$

$$p(0) = r_0(0)\,, \quad p(1) = r_1(0)\,, \tag{6}$$

$$\frac{\mathrm{d}r_0}{\mathrm{d}t}(0+) = g(0, 0, p(0)) \frac{\mathrm{d}^2p}{\mathrm{d}x^2}(0+) + h(0, 0, p(0)) \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}(0+) + f(0,0, p(0), 0)\,, \tag{7}$$

$$\frac{\mathrm{d}r_1}{\mathrm{d}t}(0+) = g(1, 0, p(1)) \frac{\mathrm{d}^2p}{\mathrm{d}x^2}(1-) + h(1, 0, p(1)) \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}(1-) + f(1, 0, p(1), 0)\,.$$

Potom existuje $\bar{T} \in (0, T\rangle$ *takové, že na* $\bar{Q} = \langle 0, 1\rangle \times \langle 0, \bar{T}\rangle$ *existují jednoznačně funkce* $u(x, t)$, $y(x, t)$ *splňující tyto podmínky:*

1. *Uvnitř* $\bar{Q}$ *existují spojité a na hranici* Q *spojitě prodlužitelné parciální derivace* u'_x, u'_t, u''_{xx} *a* y'_t.

2. *Platí okrajové a počáteční podmínky*

$$u(0, t) = r_0(t),\ u(1, t) = r_1(t)\,,\ u(x, 0) = p(x)\,, \tag{8}$$

$$y(x, 0) = 0\,, \tag{9}$$

kde $$x \in \langle 0, 1\rangle\,, \quad t \in \langle 0, \bar{T}\rangle\,.$$

3. *Pro každý bod* $(x, t) \in \bar{Q}$ *platí* $u(x, t) \in I_1$, $y(x, t) \in I_2$.

4. *Na* $\bar{Q}$ *řeší funkce* $u(x, t)$, $y(x, t)$ *systém rovnic* (1), (2).

Dále platí: Je-li $\sup_{Q_1} \left(\left|\frac{\partial g}{\partial x_3}\right|, \left|\frac{\partial h}{\partial x_3}\right| \right)$ *dosti malé, je* $\bar{T} = T$.

Věta 2 (konvergenční). *Buďte p, r_0, r_1, f, g, h funkce definované jako ve větě 1. Nechť $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ splňuje L. p. vzhledem k x_2, x_3 a x_4, $g(x_1, x_2, x_3)$ a $h(x_1, x_2, x_3)$ vzhledem k x_3. Nechť na Q existují funkce $u(x, t)$, $y(x, t)$ splňující podmínky 1.—4. z tvrzení věty 1. Buď M přirozené číslo, $\varkappa$ takové, že*

$$0 < \varkappa < (2 \max_{Q_1} g(x_1, x_2, x_3))^{-1} .$$

Označme $\Delta x = M^{-1}$, $\Delta t = \varkappa\Delta x^2$, $N = [T \,.\, \Delta t^{-1}]$.

Nazveme síťovým řešením systém čísel ${}_M u_m^n$ $(m = 0, 1, \ldots, M;\ n = 0, 1, \ldots, N)$ definovaných vztahy

$${}_M u_m^0 = p(m\Delta x) , \quad {}_M u_0^n = r_0(n\Delta t) , \quad {}_M u_M^n = r_1(n\Delta t) , \tag{10}$$

$${}_M^t u_m^n = {}_M g_m^n \, {}_M^{xx} u_{m-1}^n + {}_M h_m^n \, {}_M^x u_m^n + \varphi_m^n , \tag{11}$$

kde

$${}_M^t u_m^n = \frac{{}_M u_m^{n+1} - {}_M u_m^n}{\Delta t} , \quad {}_M^x u_m^n = \frac{{}_M u_{m+1}^n - {}_M u_m^n}{\Delta x} , \quad {}_M g_m^n = g(m\Delta x, n\Delta t , {}_M u_m^n) ,$$

$${}_M h_m^n = h(m\Delta x, n\Delta t, {}_M u_m^n) \quad a \quad \varphi_m^n = f(m\Delta x, n\Delta t, {}_M u_m^n, \Delta t \sum_{i=0}^{n-1} \varphi_m^i) .$$

Potom síťové řešení konverguje k $u(x, t)$ stejnoměrně na Q v tom smyslu, že ke každému $\varepsilon > 0$ lze přiřadit M_0 tak, že pro každé $M \geqq M_0$ jest

$$\max_{m=0,1,\ldots,M,\, n=0,1,\ldots,N} |{}_M u_m^n - u(m\Delta x, n\Delta t)| < \varepsilon .$$

Označení. Označíme P_i $(i = 0, 1, 2)$ konstantu majorisující absolutní hodnotu i-té derivace (pokud existuje) funkce $p(x)$, $r_0(t)$, $r_1(t)$; F, G, H konstanty majorisující funkce $|f(x_1, x_2, x_3, x_4)|$, $|g(x_1, x_2, x_3)|$, $|h(x_1, x_2, x_3)|$ a g konstantu minorisující funkci $g(x_1, x_2, x_3)$. Dále označíme L_1 Lipschitzovu konstantu funkcí $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ vzhledem ke všem proměnným, $g(x_1, x_2, x_3)$ a $h(x_1, x_2, x_3)$ vzhledem k x_1 a x_2, L_2 Lipschitzovu konstantu funkcí $g(x_1, x_2, x_3)$ a $h(x_1, x_2, x_3)$ vzhledem k x_3. Dále označíme

$$u(m\Delta x, n\Delta t) = u_m^n , \quad y(m\Delta x, n\Delta t) = y_m^n , \quad f(m\Delta x, n\Delta t, u_m^n, y_m^n) = f_m^n ,$$
$$g(m\Delta x, n\Delta t, u_m^n) = g_m^n , \quad h(m\Delta x, n\Delta t, u_m^n) = h_m^n .$$

Poznámka 1. Jak plyne z tvrzení 1 v odstavci 5, opravňuje nás předpoklad (4) při dosti velkých M dosazovat za x_3 síťová řešení, aniž bychom opustili definiční obor funkcí $g(x_1, x_2, x_3)$, $h(x_1, x_2, x_3)$, $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$. Právě tak vzhledem k předpokladu (5) můžeme ve φ_m^n za x_4 dosadit výraz $\Delta t \sum_{i=0}^{n-1} \varphi_m^i$.

Poznámka 2. Předpoklady (4) a (5) lze zařídit tímto způsobem: Buď $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ spojitá funkce na $\langle 0, 1\rangle \times \langle 0, \infty) \times (-\infty, \infty) \times (-\infty, \infty)$, která splňuje uvedené předpoklady hladkosti na každé omezené části svého definičního oboru. Zřejmě je

$$F(T, U) = \max_{x_1 \in \langle 0,1\rangle,\, x_2 \in \langle 0,T\rangle,\, |x_{3,4}| \leqq U} |f(x_1, x_2, x_3, x_4)|$$

neklesající funkce vzhledem k T i U. Předpoklady (4) a (5) budou splněny, zvolíme-li $I_1 = I_2 = \langle -U; U\rangle$ a bude-li platit

$$P_0 + T \,.\, F(T, U) \leqq U\,. \tag{*}$$

Je-li na příklad $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ omezená na každé množině $\langle 0, 1\rangle \times \langle 0, T\rangle \times \times (-\infty, \infty) \times (-\infty, \infty)$, lze nalézt při daném T z věty 1 takové U, aby nerovnost (*) platila. V opačném případě zvolíme $U > P_0$, pak existuje $T > 0$ (vzhledem k monotonnosti $F(T, U)$), pro které (*) platí. V tomto případě nemůžeme volit T libovolně velké.

Poznámka 3. Metoda důkazu věty 1: Definujeme posloupnost po částech lineárních funkcí ${}_M u(x, t)$ takových, že ${}_M u(m\Delta x, n\Delta t) = {}_M u_m^n$. Dokážeme stejnoměrnou ohraničenost a stejnou spojitost této a obdobně definovaných posloupností ${}_M^x u(x, t)$, ${}_M^t u(x, t)$, ${}_M^{xx} u(x, t)$. Podle Arzelovy věty vybereme posloupnost konvergentní, o jejíž limitě dokážeme, že splňuje podmínky žádané ve větě 1. Jednoznačnost plyne z věty 2.

3. Definice a pomocné věty

V odhadech prováděných v odstavcích 4,5 budeme používat toto

Lemma 1. *Buďte $a, b, c, v_0, \Delta t$ taková nezáporná čísla, že buď je $b^2 - 4ac > 0$ neb $a = b = 0$. Buď v_n posloupnost čísel definovaných rekurentním vztahem*

$$v_{n+1} = v_n + \Delta t(a v_n^2 + b v_n + c)\,.$$

Označíme-li $n\Delta t = t$, jest

I. *pro $a = b = 0$*

$$v_n \leqq v_0 + ct\,,$$

II. *pro $a = 0, b > 0$*

$$v_n \leqq v_0 e^{bt} + \frac{c}{b}(e^{bt} - 1)\,,$$

III. *pro $a > 0$*

$$v_n \leqq \frac{1}{a}\,\frac{r e^{(r-s)t} - s\,\dfrac{r + a v_0}{s + a v_0}}{\dfrac{r + a v_0}{s + a v_0} - e^{(r-s)t}}\,,$$

pokud

$$t < T_{kr} = \frac{1}{r - s}\ln\frac{r + a v_0}{s + a v_0}\,,\ \textit{kde}\ r, s = \frac{1}{2}\left(b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}\right).$$

Pro $a > 0$ dále platí $\lim\limits_{a \to 0} T_{kr} = \infty$.

Důkaz. Provedeme pouze důkaz tvrzení III., neboť důkazy I. a II. jsou zcela obdobné. Buď tedy $a > 0$, $b^2 - 4ac > 0$. Jest $r - s > 0$. Všimněme si, že

$$\frac{1}{av^2 + bv + c} = \frac{1}{r - s}\left(\frac{1}{v + \frac{s}{a}} - \frac{1}{v + \frac{r}{a}}\right)$$

je pro $v \geq 0$ nerostoucí funkce. Platí tedy

$$t = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{v_{i+1} - v_i}{av_i^2 + bv_i + c} \geq \sum_{i=0}^{n-1} \int_{v_i}^{v_{i+1}} \frac{d\xi}{a\xi^2 + b\xi + c} = \frac{1}{r - s}\left[\ln \frac{\xi + \frac{s}{a}}{\xi + \frac{r}{a}}\right]_{v_0}^{v_n}.$$

Dosazením mezí vyjde

$$v_n\left(\frac{r + av_0}{s + av_0} - e^{(r-s)t}\right) \leq \frac{1}{a}\left(re^{(r-s)t} - s\frac{r + av_0}{s + av_0}\right).$$

Vzhledem k předpokladu o T_{kr} je koeficient u v_n kladný, čímž je tvrzení III. dokázáno. Výpočet $\lim\limits_{a \to 0} T_{kr}$ je triviální. Lemma 1 je dokázáno.

Připomeňme následující definici a větu, jejíž důkaz je v [1], str. 76.

Definice. *Buď P metrický prostor s metrikou ϱ, buď $f_n(x)$ posloupnost funkcí na P. Řekněme, že $\{f_n(x)\}$ je posloupnost stejně spojitých funkcí, jestliže ke každému $\varepsilon > 0$ lze přiřadit $\delta > 0$ tak, že pro každé n platí*

$$\varrho(x, x') \leq \delta \Rightarrow |f_n(x) - f_n(x')| \leq \varepsilon .$$

Věta (Arzelova). *Je-li P separabilní metrický prostor, pak ze stejnoměrně ohraničené posloupnosti stejně spojitých funkcí na P lze vybrat posloupnost stejnoměrně konvergentní.*

Zaveďme ještě pojem síťové funkce a jejího lineárního rozšíření a dokažme o nich jednu pomocnou větu.

Definice A. *Buď Q z věty 1, M přirozené, $\varkappa > 0$. Nazveme síťovou funkcí na Q systém čísel ${}_Mz_m^n$, kde $m = 0, 1, \ldots, M$; $n = 0, 1, \ldots, N = [TM^2\varkappa^{-1}]$.*

Definice B. *Nazveme lineárním rozšířením síťové funkce ${}_Mz_m^n$ na Q takovou po částech lineární funkci ${}_Mz(x, t)$, pro kterou platí:*

1. *${}_Mz(m\Delta x, n\Delta t) = {}_Mz_m^n$, kde Δx, Δt jsou z věty 2 a $m = 0, 1, \ldots, M$; $n = 0, 1, \ldots, N$;*

2. *${}_Mz(x, t)$ je lineární na trojúhelnících o vrcholech $(m\Delta x, n\Delta t)$ $((m + 1)\Delta x, n\Delta t)$ $((m + 1)\Delta x, (n + 1)\Delta t)$ a $(m\Delta x, n\Delta t)$ $((m + 1)\Delta x, (n + 1)\Delta t)$ $(m\Delta x, (n + 1)\Delta t)$, kde $m = 0, 1, \ldots, M - 1$; $n = 0, 1, \ldots, N - 1$;*

3. *${}_Mz(x, t) = {}_Mz(x, N\Delta t)$ pro $t \in \langle N\Delta t, T\rangle$.*

Lemma 2. *Buď $\{{}_Mz_m^n\}_{M=1}^{\infty}$ posloupnost síťových funkcí na Q. Nechť existují čísla K_1, K_2 nezávislá na M tak, že pro všechna M je*

$$|{}_M^x z_m^n| \leq K_1 , \quad |{}_M^t z_m^n| \leq K_2 . \tag{0}$$

Potom posloupnost $\{_M z(x, t)\}$ lineárních rozšíření síťových funkcí $_M z_m^n$ na Q je posloupnost stejně spojitých funkcí.

Poznámka. Stačí předpokládat existenci M_1 tak, aby nerovnosti (0) byly splněny pro $M \geqq M_1$, neb konečný počet poměrných diferencí můžeme vždy majorisovat.

Důkaz. Buď $\varepsilon > 0$. Zvolme M_0 tak, aby pro $M > M_0$ bylo $\Delta x K_1 + \Delta t K_2 \leqq \leqq \frac{\varepsilon}{8}$. Funkce $_M z(x, t)$ je na Q stejnoměrně spojitá, proto existuje číslo $\delta_M > 0$ tak, že

$$\overline{(x, t)\,(x', t')} \leqq \delta_M \Rightarrow |_M z(x, t) - {_M z(x', t')}| \leqq \varepsilon\,.$$

Zvolme $\delta = \min\limits_{i=1,\ldots,M_0} \left(\delta_i, \frac{\varepsilon}{2(K_1 + K_2)}\right)$. Máme dokázat

$$\overline{(x, t)\,(x', t')} \leqq \delta \Rightarrow |_M z(x, t) - {_M z(x', t')}| \leqq \varepsilon\,. \tag{**}$$

Pro $M \leqq M_0$ je (**) zřejmé, buď tedy $M > M_0$. Buď $(m\Delta x, n\Delta t)$ (respektive $(m'\Delta x, n'\Delta t)$) jeden z vrcholů trojúhelníka z definice B, v němž leží bod (x, t) (respektive (x', t')). Jest

$$|_M z(x, t) - {_M z(x', t')}| \leqq |_M z(x, t) - {_M z_m^n}| + |_M z_m^n - {_M z_{m'}^n}| + |_M z_{m'}^n - {_M z_{m'}^{n'}}| +$$
$$+ |_M z_{m'}^{n'} - {_M z(x', t')}| \leqq 2(\Delta x K_1 + \Delta t K_2) + |m - m'|\, \Delta x K_1 + |n - n'|\, \Delta t K_2 \leqq$$
$$\leqq 2(\Delta x K_1 + \Delta t K_2) + (2\Delta x + \delta)\, K_1 + (2\Delta t + \delta)\, K_2 \leqq 4 \,.\, \frac{\varepsilon}{8} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\,.$$

Lemma 2 je dokázáno.

4. Důkaz konvergenční věty

Buď M tak velké, aby

$$1 - 2\varkappa\, G - \frac{\Delta t}{\Delta x} H \geqq 0\,, \quad \varkappa g - \frac{\Delta t}{\Delta x} H \geqq 0\,. \tag{12}$$

Ze spojitosti a spojité prodlužitelnosti derivací $u(x, t)$ na hranici Q plyne, že

1. u'_x, u'_t, u''_{xx} jsou na Q omezené (příslušné konstanty označme K_1, K_2, K_3),
2. pro $M \to \infty$ je

$$_M\varepsilon_m^n = {^t u_m^n} - g_m^n\, {^{xx}u_{m-1}^n} - h_m^n\, {^x u_m^n} - f_m^n \to 0$$

stejnoměrně vzhledem k m, n, neboť po dosazení z (1) jest

$$|_M\varepsilon_m^n| \leqq |{^t u_m^n} - u'_t(m\Delta x, n\Delta t)| + G\, |{^{xx}u_{m-1}^n} - u''_{xx}(m\Delta x, n\Delta t)| +$$
$$+ H\, |{^x u_m^n} - u'_x(m\Delta x, n\Delta t)|\,.$$

Označíme-li $u_m^n - {}_M u_m^n = {}_M v_m^n$ plyne z (11)

$$
{}_M v_m^{n+1} = \left(1 - 2\varkappa_M g_m^n - \frac{\Delta t}{\Delta x}\, {}_M h_m^n\right) {}_M v_m^n + \left(\varkappa_M g_m^n + \frac{\Delta t}{\Delta x}\, {}_M h_m^n\right) {}_M v_{m+1}^n +
$$
$$
+ \varkappa_M g_m^n\, {}_M v_{m-1}^n + \Delta t \,[f_m^n - \varphi_m^n + (g_m^n - {}_M g_m^n)\, {}^{xx}u_{m-1}^n +
$$
$$
+ (h_m^n - {}_M h_m^n)\, {}^{x}u_m^n + {}_M \varepsilon_m^n] \tag{13}
$$

a zřejmě

$$
{}_M v_m^0 = {}_M v_0^n = {}_M v_M^n = 0 \, .
$$

Odhadněme $|f_m^n - \varphi_m^n| = \Phi_n$. Tvrdíme

$$
\Phi_n \leqq L_1\left[\sigma_n(1 + L_1\Delta t)^n + \frac{\Delta t}{2}(1 + K_2 + F)\,((1 + L_1\Delta t)^n - 1)\right], \tag{14}
$$

kde

$$
\sigma_n = \max_{i=0,1,\ldots,n;\; j=0,1,\ldots,M} |{}_M v_j^i| \, .
$$

Pro $n = 0$ je (14) zřejmé. Dále předpokládejme platnost (14) pro čísla nejvýše rovna n a odhadujme ($y(x, t)$ vyjádříme ze (3)):

$$
\Phi_{n+1} = |f(x, (n+1)\,\Delta t, u_m^{n+1}, y_m^{n+1}) - f(x, (n+1)\,\Delta t\,,\ {}_M u_m^{n+1}, \Delta t \sum_{i=0}^{n} \varphi_m^i)| \leqq
$$
$$
\leqq L_1[\sigma_{n+1} + \sum_{i=0}^{n} \int_{i\Delta t}^{(i+1)\Delta t} |f(x, \tau, u(x, \tau), y(x, \tau)) - f(x, i\Delta t, {}_M u_m^i, \Delta t \sum_{j=0}^{i} \varphi_m^j)|\, d\tau] \leqq
$$
$$
\leqq L_1\,[\sigma_{n+1} + \sum_{i=0}^{n} \int_{i\Delta t}^{(i+1)\Delta t} L_1(1 + K_2 + F)\,(\tau - i\Delta t)\, d\tau + \Delta t \sum_{i=0}^{n} \Phi_i] \leqq
$$
$$
\leqq L_1[\sigma_{n+1} + \Delta t L_1 \sigma_{n+1} \frac{(1 + L_1\Delta t)^{n+1} - 1}{1 + L_1\Delta t - 1} + \frac{\Delta t^2}{2}(1 + K_2 + F)\, L_1 \,.
$$
$$
.\left(\frac{(1 + L_1\Delta t)^{n+1} - 1}{1 + L_1\Delta t - 1} - (n+1)\right) + (n+1)\,\frac{\Delta t^2}{2} L_1(1 + K_2 + F)] \leqq
$$
$$
\leqq L_1\left[\sigma_{n+1}(1 + L_1\Delta t)^{n+1} + \frac{\Delta t}{2}(1 + K_2 + F)\,((1 + L_1\Delta t)^{n+1} - 1)\right],
$$

čímž je důkaz (14) proveden. Jelikož

$$
(1 + L_1\Delta t)^n \leqq e^{L_1 T} \tag{15}
$$

plyne z (14)

$$
|f_m^n - \varphi_m^n| \leqq \alpha_1\sigma_n + \alpha_2\Delta t \, , \tag{16}
$$

kde α_1, α_2 jsou konstanty nezávislé na M. Buď v_n posloupnost čísel definovaná vztahy

$$
v_0 = 0 \, , \quad v_{n+1} = v_n + \Delta t\,[(\alpha_1 + L_2(K_1 + K_3))\, v_n + \alpha_2\Delta t + \max_{m=0,\ldots M} {}_M\varepsilon_m^n] \, .
$$

Nerovnost $|{}_M v_m^n| \leqq v_n$ dokážeme indukcí. Pro $n = 0$ je zřejmá, platí-li pro n, jest podle (13) a (16)

$$
|{}_M v_m^{n+1}| \leqq v_n + \Delta t\,[\alpha_1 v_n + \alpha_2\Delta t + L_2(K_1 + K_3)\, v_n + {}_M\varepsilon_m^n] \leqq v_{n+1} \, ,
$$

neboť dle (12) jest

$$1 - 2\varkappa_M g_m^n - \frac{\Delta t}{\Delta x}\, {}_M h_m^n \geqq 1 - 2\varkappa G - \frac{\Delta t}{\Delta x} H \geqq 0$$

a

$$\varkappa_M g_m^n + \frac{\Delta t}{\Delta x}\, {}_M h_m^n \geqq \varkappa g - \frac{\Delta t}{\Delta x} H \geqq 0 \, .$$

Stejnoměrná konvergence ${}_M v_m^n$ k 0 plyne z lemmatu 1. Tím je konvergenční věta dokázána.

5. Důkaz existenční věty

V tomto odstavci budeme předpokládat, že $M = 2^i$. Nejdříve dokážeme čtyři pomocné věty (tvrzení).

Tvrzení 1. *Síťová řešení definovaná vztahy* (10), (11) *jsou při dosti velkých M omezená konstantou $K = P_0 + FT$ nezávislou na M.*

Důkaz. Zvolíme M tak velké, aby platilo (12). Indukcí (stejně jako v odst. 4) dokážeme, že $|{}_M u_m^n| \leqq u_n$, kde $u_0 = P_0$, $u_{n+1} = u_n + \Delta t F$. Tvrzení 1 vyplývá z lemmatu 1.

Tvrzení 2. *Existuje T z věty 1 tak, že pro $n\Delta t \leqq T$ jsou poměrné diference ${}_M^x u_m^n$, ${}_M^t u_m^n$ při dosti velkých M omezené konstantami K_1, K_2 nezávislými na M.*

Poznámka. Jak uvidíme dále, jsou tyto konstanty K_1, K_2 totožné se stejně označenými konstantami v odstavci 4, neboť dokážeme, že derivace řešení jsou limitami vybraných posloupností lineárních rozšíření funkcí ${}_M^x u_m^x$, ${}_M^t u_m^n$.

Důkaz. Odhadneme $|{}_M^x u_m^n|$ v závislosti na $\max\limits_{k=0,\ldots,M} |{}_M^t u_k^n|$ a najdeme diferenční rovnici pro ${}_M^t u_m^n$, kterou odhadneme pomocí lemmatu 1. Pro stručnost vynecháváme index M. Označme

$$\beta_1 = 2K\left(1 + \frac{3H}{g} + 2L_1 \frac{G + H}{g^2}\right) + \frac{2F}{g} \, , \quad \beta_2 = L_2 \frac{G + H}{g^2} \, .$$

Buď v_n posloupnost čísel definovaná vztahy

$$v_0 = \max\left(P_1, GP_2 + HP_1 + F \, , \ \frac{g}{4}(P_1 - 2\beta_1)\right) , \tag{17}$$

$$v_{n+1} = v_n + \Delta t(\alpha_1 v_n^2 + \alpha_2 v_n + \alpha_3) \, , \tag{18}$$

kde

$$\alpha_1 = \frac{L_2}{g}\left(5 + \frac{4H}{g}\right) , \quad \alpha_3 = 2\beta_1 L_1\left(1 + \frac{H}{g}\right) + L_1\left(1 + F + \frac{F}{g}\right)$$

a

$$\alpha_2 = \max\left(\sqrt{5\alpha_1\alpha_3}, \, 2\beta_1 L_2\left(1 + \frac{H}{g}\right) + L_1\left(1 + \frac{5}{g} + \frac{4H}{g^2}\right) + \frac{L_2 F}{g}\right) .$$

Jest $\alpha_2^2 - 4\alpha_1\alpha_3 > 0$ a tedy podle lemmatu 1 existuje $T_{kr} > 0$ tak, že pro $T < T_{kr}$ existuje taková konstanta K_2 nezávislá na M, že pro $n\Delta t \leqq T$ jest $v_n \leqq K_2$. Při tom

$$\lim_{\alpha_1 \to 0} T_{kr} = \infty\,. \tag{19}$$

Označme $K_1 = 2\left(\frac{2}{g} K_2 + \beta_1\right)$ a zvolme M tak velké, aby platilo (12) a

$$1 - \beta_2 K_1 \Delta x - 2\varkappa\beta_2 K_2 \Delta x^2 \geqq \tfrac{1}{2}\,. \tag{20}$$

Dokažme indukcí, že

$$|{}^t u_m^n| \leqq v_n\,. \tag{21}$$

I. Pro $n = 0$ plyne (21) z (11), pro $m = 0, M$ plyne (21) z (6) a monotonnosti posloupnosti v_n.

II. Předpokládejme platnost (21) pro $n = 0, 1, \ldots, \nu$ a dokažme (21) pro $\nu + 1$. Abychom odhadli $|{}^t u_m^n|$ v závislosti na v_n, vyšetřujme funkci

$$\psi_m^n = u_m^n - u_0^n + \sum_{k=0}^{m} \Delta x \int_{u_0^n}^{u_k^n} \frac{h(k\Delta x, n\Delta t, \alpha)}{g(k\Delta x, n\Delta t, \alpha)}\, \mathrm{d}\alpha\,.$$

Použijeme-li tvrzení 1 a předpokladů o hladkosti funkcí $g(x_1, x_2, x_3)$, $h(x_1, x_2, x_3)$, $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$, zjistíme výpočtem (viz obdobný výpočet v [2], str. 114), že platí

$$\psi_0^n = 0\,, \quad |\psi_M^n| \leqq 2K\left(1 + \frac{2H}{g}\right),$$

$${}^x\psi_m^n = {}^x u_m^n + \int_{u_0^n}^{u_{m+1}^n} \frac{h((m+1)\,\Delta x, n\Delta t, \alpha)}{g((m+1)\,\Delta x, n\Delta t, \alpha)}\, \mathrm{d}\alpha\,,$$

$$|{}^{xx}\psi_{m-1}^n| \leqq \left|{}^{xx}u_{m-1}^n + \frac{h_m^n}{g_m^n}\, {}^x u_m^n\right| + \frac{\beta_2}{2}\, \Delta x ({}^x u_m^n)^2 + 2KL_1 \frac{G + H}{g^2}\,.$$

Jelikož

$$|{}^x\psi_m^n| \leqq |\psi_M^n - \psi_0^n| + 2 \max_{k=1,\ldots,M-1} |{}^{xx}\psi_{k-1}^n|\,,$$

vyplývá z předchozího po dosazení z (11)

$$\max_{k=0,\ldots,M-1} |{}^x u_k^n| \,(1 - \beta_2 \Delta x \max_{k=0,\ldots,M-1} |{}^x u_k^n|) \leqq \frac{2}{g}\, v_n + \beta_1\,. \tag{22}$$

Dokažme indukcí, že pro $n = 0, 1, \ldots, \nu$; $m = 0, 1, \ldots, M - 1$ je

$$|{}^x u_m^n| \leqq 2\left(\frac{2}{g}\, v_n + \beta_1\right). \tag{23}$$

Pro $n = 0$ plyne (23) z (17). Nechť (23) platí pro $0 < n < \nu$. Pak jest

$$|{}^{x}u_m^{n+1}| \leqq \varkappa\Delta x\,|{}^{t}u_{m+1}^{n}| + |{}^{x}u_m^n| + \varkappa\Delta x\,|{}^{t}u_m^n| \leqq K_1 + 2\varkappa\Delta x K_2$$

a podle (20) a (22) jest

$$\max_{k=0,\ldots,M-1} |{}^{x}u_k^{n+1}| \leqq 2\left(\frac{2}{g}\,v_{n+1} + \beta_1\right),$$

čímž je (23) dokázáno. Provedeme poměrnou diferenci dle t na (11), dosadíme za ${}^{xx}u_{m-1}^{n}$ z (11) a vyjádříme ${}^{t}u_m^{n+1}$:

$$\begin{aligned}{}^{t}u_m^{n+1} &= \left(1 - 2\varkappa g_m^{n+1} - \frac{\Delta t}{\Delta x}\,h_m^{n+1}\right){}^{t}u_m^n + \left(\varkappa g_m^{n+1} + \frac{\Delta t}{\Delta x}\,h_m^{n+1}\right){}^{t}u_{m+1}^{n} + \varkappa g_m^{n+1}\,{}^{t}u_{m-1}^{n} + \\ &+ \Delta t\left[\frac{{}^{t}g_m^n}{g_m^n}\,{}^{t}u_m^n + \left({}^{t}h_m^n - \frac{h_m^n}{g_m^n}\,{}^{t}g_m^n\right){}^{x}u_m^n + {}^{t}\varphi_m^n - \frac{\varphi_m^n}{g_m^n}\,{}^{t}g_m^n\right].\end{aligned}$$

Jelikož je

$$|{}^{t}\varphi_m^n| \leqq L_1(1 + |{}^{t}u_m^n| + F)\,; \quad |{}^{t}g_m^n|\,,\ |{}^{t}h_m^n| \leqq L_1 + L_2\,|{}^{t}u_m^n|\,,$$

vyplývá z (12), (23) a indukčního předpokladu

$$\begin{aligned}|{}^{t}u_m^{\nu+1}| &\leqq v_\nu + \Delta t\left[\frac{v_\nu}{g}\,(L_1 + L_2 v_\nu) + 2\left(\frac{2}{g}\,v_\nu + \beta_1\right)(L_1 + L_2 v_\nu)\left(1 + \frac{H}{g}\right) + \right. \\ &\left. + L_1(1 + v_\nu + F) + \frac{F}{g}\,(L_1 + L_2 v_\nu)\right] = v_\nu + \Delta t(\alpha_1 v_\nu^2 + \alpha_2 v_\nu + \alpha_3) = v_{\nu+1}\,,\end{aligned}$$

čímž jsou (21) a (23) pro $n\Delta t \leqq \bar{T}$ a tím i tvrzení 2 dokázány.

Tvrzení 3. *Poměrné diference* ${}^{xx}_{M}u_{m-1}^{n}$, ${}^{xt}_{M}u_m^n$, ${}^{tt}_{M}u_m^n$, ${}^{xxx}_{M}u_{m-1}^{n}$, ${}^{xxt}_{M}u_{m-1}^{n}$ *jsou na* $\bar{Q}$ *omezené nezávisle na* M.

Důkaz. Omezenost ${}^{xx}_{M}u_{m-1}^{n}$ plyne z (11) na základě tvrzení 2. Pro ${}^{xt}_{M}u_m^n$ a ${}^{tt}_{M}u_m^n$ se důkaz vede zcela obdobně důkazu tvrzení 2; podstatným zjednodušením je to, že v (18) bude $\alpha_1 = 0$, takže nenastane žádné další omezení $\bar{T}$, není potřeba předpokladu obdobného (20) a funkce ψ_m^n, pomocí níž odhadneme $|{}^{xt}_{M}u_m^n|$ v závislosti na $|{}^{tt}_{M}u_m^n|$ bude

$$\psi_m^n = {}^{t}_{M}u_m^n - {}^{t}_{M}u_0^n + \Delta x \sum_{k=0}^{m} ({}^{t}_{M}u_k^n - {}^{t}_{M}u_0^n)\,\frac{h_k^{n+1}}{g_k^{n+1}}\,.$$

Omezenost ${}^{tt}_{M}u_m^n$ pro $n = 0$ a $m = 0, M$ plyne z (7) a předpokladů o hladkosti funkcí $g(x, 0, p(x))$, $h(x, 0, p(x))$, $f(x, 0, p(x), 0)$. Omezenost ${}^{xxx}_{M}u_{m-1}^{n}$ a ${}^{xxt}_{M}u_{m-1}^{n}$ dokážeme přímo z (11). Po vyjádření ${}^{xx}_{M}u_{m-1}^{n}$ a provedení poměrné diference dle x (respektive dle t) vyjdou výrazy snadno odhadnutelné na základě předchozích výpočtů, pouze odhad $|{}^{x}\varphi_m^n|$ není zcela obvyklý. Tvrdíme

$$|{}^{x}\varphi_m^n| \leqq L_1(1 + K_1)\,(1 + L_1\Delta t)^n\,. \tag{24}$$

Pro $n = 0$ jest (24) triviální. Nechť platí pro $n = 0, 1, \ldots, \nu$ a potom jest

$$|{}^{x}\varphi_m^{\nu+1}| \leqq L_1(1 + K_1 + \Delta t \sum_{i=0}^{\nu} |{}^{x}\varphi_m^i|) \leqq$$

$$\leqq L_1(1+K_1)\left(1+L_1\Delta t\,\frac{(1+L_1\Delta t)^{\nu+1}-1}{1+L_1\Delta t-1}\right)=L_1(1+K_1)\,(1+L_1\Delta t)^{\nu+1}\,,$$

čímž je (24) dokázáno. Podle (15) jest

$$|^x q^n_m| \leqq L_1(1+K_1)\,e^{L_1T}\,.$$

Tvrzení 3 je dokázáno.

Definice *funkce $u(x, t)$. Z tvrzení 1, 2 a 3 plyne stejnoměrná ohraničenost a podle lemmatu 2 stejná spojitost posloupností lineárních rozšíření $_M u(x, t)$, $^x_M u(x, t)$, $^t_M u(x, t)$, $^{xx}_M u(x, t)$. Vybereme podle Arzelovy věty diagonálním postupem takovou posloupnost přirozených čísel $\{\mu\}$, aby posloupnosti*

$$_\mu u(x, t)\,,\quad {}^x_\mu u(x, t)\,,\quad {}^t_\mu u(x, t)\,,\quad {}^{xx}_\mu u(x, t) \tag{25}$$

stejnoměrně konvergovaly a označíme jejich limity

$$u(x, t)\,,\quad {}^x u(x, t)\,,\quad {}^t u(x, t)\,,\quad {}^{xx} u(x, t)\,, \tag{26}$$

Tvrzení 4. *Uvnitř Q existují derivace u'_x, u'_t, u''_{xx} a platí*

$$\frac{\partial u}{\partial x} = {}^x u(x, t)\,,\quad \frac{\partial u}{\partial t} = {}^t u(x, t)\,,\quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = {}^{xx} u(x, t)\,.$$

Důkaz. Dokážeme tvrzení 4 pouze pro u'_x, neboť pro u'_t a u''_{xx} je důkaz zcela obdobný. Buďte (x_1, t), (x_2, t) uzlové body jisté μ-sítě, $x_1 < x_2$. Jelikož $\{\mu\}$ je vybrána z posloupnosti $\{2^i\}$, jsou tyto body uzly všech jemnějších sítí. Označme $x_1 = m_1\Delta x$, $x_2 = m_2\Delta x$, $t = n\Delta t$, kde Δx, Δt, m_1, m_2, n závisí na μ. Jest

$$_\mu u(x_2, t) - {}_\mu u(x_1, t) = \Delta x \sum_{i=m_1}^{m_2-1} {}^x u(i\Delta x, t) + \varepsilon_\mu\,.$$

Jelikož

$$\lim_{\mu\to\infty} \varepsilon_\mu = \lim_{\mu\to\infty} \Delta x \sum_{i=m_1}^{m_2-1} ({}^x_\mu u^n_i - {}^x u(i\Delta x, t)) = 0\,,$$

plyne limitním přechodem

$$u(x_2, t) - u(x_1, t) = \int_{x_1}^{x_2} {}^x u(\xi, t)\,\mathrm{d}\xi\,.$$

Tato rovnice však platí ve všech bodech (x_1, t), (x_2, t), neboť množina uzlových bodů všech μ-sítí je hustá v $\bar{Q}$ a funkce $u(x, t)$, $^x u(x, t)$ jsou spojité. Existence u'_x a dokazovaná rovnost plyne triviálně. Tvrzení 4 je dokázáno.

Definice *funkce $y(x, t)$. Existence a jednoznačnost funkce $y(x, t)$ jako řešení rovnice* (2) *s počáteční podmínkou* (9) *při daném $u(x, t)$ z* (26) *plyne za učiněných předpokladů o hladkosti funkce $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ z theorie obyčejných diferenciálních rovnic.*

Přikročme k vlastnímu důkazu existenční věty.

Důkaz první části tvrzení věty 1 pro konstruované funkce $u(x, t)$, $y(x, t)$ plyne z tvrzení 4, spojitost funkcí (26) na $\bar{Q}$ a pro y'_t přímo z (2).

Druhá část vyplývá z konstrukce funkce $y(x, t)$ a z toho, že spojité funkce $u(x, 0)$ a $p(x)$, $u(0, t)$ a $r_0(t)$, $u(1, t)$ a $r_1(t)$ se shodují na hustých množinách uzlových bodů.

Třetí část plyne pro funkci $u(x, t)$ z její definice, z tvrzení 1 a předpokladu (4), pro funkci $y(x, t)$ z odhadu integrálu v (3) a předpokladu (5).

Čtvrtá část vyplývá z konstrukce funkce $y(x, t)$, ze stejnoměrné konvergence funkcí (25) k funkcím (26) a ze vztahů

$$|g_m^n - {}_\mu g_m^n| \leq L_2 \, |u_m^n - {}_\mu u_m^n| \, ,$$

$$|h_m^n - {}_\mu h_m^n| \leq L_2 \, |u_m^n - {}_\mu u_m^n| \, ,$$

$$|f_m^n - q_m^n| \leq L_1 \, [\max_i |u_j^i - {}_\mu u_j^i| \, e^{L_1 \bar{T}} + \frac{\Delta t}{2} (1 + K_2 + F) \, (e^{L_1 \bar{T}} - 1)]$$

(důkaz viz odstavec 4) splněných v uzlových bodech.

Požadovaná závislost T na L_2 plyne z (19). Jednoznačnost funkce $u(x, t)$ a tím i funkce $y(x, t)$ vyplývá z věty 2. Věta 1 je úplně dokázána.

6. Závěr

Dokázané věty nás opravňují řešit první okrajovou úlohu pro rovnici vedení tepla síťovou metodou a to uvedeným diferenčním schematem (11). Toto schema bylo voleno spíše s ohledem na potřeby existenčního důkazu, t. j. co nejjednodušší při splněné podmínce konvergence (věta 2), než se zřetelem k praktickým výpočtům. Zkušenosti z praxe ukazují rychlejší konvergenci složitějších diferenčních schemat, které lépe vystihují působení zdroje na příklad tím, že na místo členu q_m^n vstupuje do rovnice jistá průměrná hodnota zdroje za časový interval Δt. K tomu přistupují též otázky pracnosti skutečného výpočtu. V jednom druhu diferenčních schemat (explicitních), mezi něž patří (11), je hodnota síťového řešení na $(n + 1)$-vém časovém řádku vyjádřena explicitně na základě již známých hodnot na řádku n-tém. Tato schemata mají však poměr $\varkappa$ (viz věta 2) omezen shora, což nás nutí dělit interval $\langle 0, T \rangle$ na mnoho dílů a tím se značně zvětší počet výpočtů. Druhý druh schemat, zvaných implicitní (na př.

$${}_M^t u_m^n = {}_M g_m^n \, {}_M^{xx} u_m^{n+1} + \dots) \, ,$$

má poměr $\varkappa$ omezen zdola (viz [3]). Zde se však dopouštíme chyby tím, že člen $g(x, t, u) \, u''_{xx}$ diferenciální rovnice nahrazujeme v diferenčním schematu částečně na řádku n-tém (g) a částečně na řádku $(n + 1)$-vém (u''_{xx}), aby schema bylo vůbec lineární rovnicí a mimo to musíme pro každý časový řádek řešit soustavu M-1 nehomogenních lineárních rovnic, které mají nenulové koeficienty v hlavní a jí sousedních diagonálách matice, čímž se výpočet značně zkomplikuje.

Konvergenci každého takového speciálního schematu je ovšem nutno dokázat; za předpokladu existence dostatečně hladkého řešení to nebývá příliš složité. Uvedenou metodou (maximalistický odhad chyby) můžeme explicitně odhadnout závislost chyby na hustotě sítě, jelikož však při tom v každém bodě nahrazujeme hodnoty funkcí a jejích derivací jejich maximálními hodnotami, jest tento odhad nesmírně nadsazen, takže k theoretickému rozhodnutí o volbě nejvýhodnějšího schematu je nepoužitelný. Z tohoto hlediska není zcela korektní ani v [3] uvedený důkaz jinak zdánlivě zřejmého tvrzení, že při pevně voleném poměru $\varkappa = \Delta t \,.\, \Delta x^{-\alpha}$ je pro parabolickou rovnici nejvýhodnější volba $\alpha = 2$. Důkaz je veden tak, že práce (t. j. množství výpočtů) potřebná k řešení je shora odhadnuta veličinou, která je minimální při $\alpha = 2$. To nás neopravňuje tvrdit, že i tato práce bude pro $\alpha = 2$ minimální, ale jest to pro praktické výpočty dobrým vodítkem.

Konvergence jistých explicitních schemat je dokazována v [4] (Cauchyova úloha) a [2] (okrajová úloha), implicitních v [2] a [3] (okrajové úlohy). Uvedenou problematikou se zabývá též [5].

LITERATURA

[1] *V. V. Stěpanov:* Kurs diferenciálních rovnic; Praha 1950.

[2] *Т. Д. Вентцель:* О применении метода конечных разностей к решению первой краевой задачи для уравнений параболического типа; Математический сборник, 40 (82), 1956, 101—122.

[3] *J. Douglas:* On the numerical integration of quasilinear parabolic differential equations; Pacific Journal of Mathematics, 6, 1956, 35—42.

[4] *И. И. Мейман:* Об уравнении теплопроводности; Доклады АН СССР, 99, 1954, 209—212.

[5] *О. А. Олейник, Т. Д. Вентцель:* Первая краевая задача и задача Коши для квазилинейных уравнений параболического типа; Математический сборник, 41 (83), 1957, 105—128.

Резюме

РЕШЕНИЕ КВАЗИЛИНЕЙНОГО ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ СО СВОБОДНЫМ ЧЛЕНОМ СПЕЦИАЛЬНОГО ТИПА МЕТОДОМ СЕТОК

ЯРОСЛАВ КАУТСКИ (Jaroslav Kautský)

(Поступило в редакцию 2/IV 1957 г.)

Подробный анализ тепловых процессов в затвердающем бетоне показывает, что источник тепла f, т. е. свододный член уравнения теплопроводности, зависит тоже от количества уже затвердевшего цемента, которое

прямопропорционально $\int_0^t f(\tau)\,d\tau$, т. е. количеству уже выделенного тепла. Это приводит нас к решению системы уравнений

$$\frac{\partial u}{\partial t} = g(x, t, u)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + h(x, t, u)\frac{\partial u}{\partial x} + f(x, t, u, y)\ ,$$

$$\frac{\partial y}{\partial t} = f(x, t, u, y)\ , \quad y(x, 0) = 0\ .$$

В работе доказывается методом сеток существование и единственность классического решения этой системы на прямоугольнике $Q = \langle 0, 1\rangle \times \langle 0, T\rangle$ (T зависит от $|f(x, t, u, y)|$, $\left|\frac{\partial g}{\partial u}\right|$, $\left|\frac{\partial h}{\partial u}\right|$) при определенных предположениях о гладкости коэффициентов, начального и краевых условий. Одновременно доказывается сходимость решения по сетке ${}_Mu_m^n$, определенного соотношениями ($\Delta x = \frac{1}{M}$, $\Delta t = \varkappa\,\Delta x^2$, $\varkappa$ положительно и ограниченно постоянной, зависящей от $g(x, t, u)$):

$${}_Mu_m^0 = u(m\,\Delta x, 0)\ , \quad {}_Mu_0^n = u(0, n\,\Delta t)\ , \quad {}_Mu_M^n = u(1, n\,\Delta t)\ ,$$

$$\frac{\Delta_M u_m^0}{\Delta t} = {}_Mg_m^n\,\frac{\Delta_M^2 u_{m-1}^n}{\Delta x^2} + {}_Mh_m^n\,\frac{\Delta_M u_m^n}{\Delta x} + \varphi_m^n\ , \tag{*}$$

где

$$\varphi_m^n = f(m\,\Delta x, n\,\Delta t, {}_Mu_m^n, \Delta t\sum_{i=0}^{n-1}\varphi_m^i).$$

Доказательство теоремы существования опирается на теорему Арцела и на оценки относительных разностей решения по сетке. Доказанные теоремы позволяют решать конкретные проблемы подобного рода методом сеток при помощи разностной схемы (*).

Summary

THE SOLUTION OF A QUASILINEAR PARABOLIC DIFFERENTIAL EQUATION WITH AN ABSOLUTE MEMBER OF A SPECIAL TYPE BY THE METHOD OF FINITE DIFFERENCES

JAROSLAV KAUTSKÝ

(Received April 2, 1957.)

From a detailed analysis of thermic processes in hardening concrete it follows that the source of heat f, i. e. the absolute member of the heat-conduction equation also depends on the amount of already dehydrated cement, which

is proportional to $\int_0^t f(\tau)\,d\tau$, i. e. on the amount of heat already developed. This leads to the system of differential equations

$$\frac{\partial u}{\partial t} = g(x, t, u)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + h(x, t, u)\frac{\partial u}{\partial x} + f(x, t, u, y(x, t)),$$

$$\frac{\partial y}{\partial t} = f(x, t, u, y(x, t)), \quad y(x, 0) = 0.$$

In the present paper the existence and uniqueness of the classical solution of this system in the rectangle $Q = \langle 0, 1\rangle \times \langle 0, T\rangle$ (T depends on $|f(x, t, u, y)|$, $\left|\frac{\partial g}{\partial u}\right|, \left|\frac{\partial h}{\partial u}\right|$) is proved under certain assumptions on the coefficients and on the initial and boundary conditions. Simultaneously the convergence of the solution ${}_M u_m^n$ obtained by the method of finite differences is proved. ${}_M u_m^n$ is defined by the following relations $\left(\Delta x = \frac{1}{M}, \Delta t = \varkappa \Delta x^2, \varkappa\right.$ positive and bounded by a constant depending on $g(x, t, u)$):

$${}_M u_m^0 = u(m\Delta x, 0), \; {}_M u_0^n = u(0, n\Delta t), \; {}_M u_M^n = u(1, n\Delta t),$$

$$\frac{\Delta_M u_m^n}{\Delta t} = {}_M g_m^n \frac{\Delta^2{}_M u_{m-1}^n}{\Delta x^2} + {}_M h_m^n \frac{\Delta_M u_m^n}{\Delta x} + \varphi_m^n, \tag{*}$$

where

$$\varphi_m^n = f(m\Delta x, n\Delta t, {}_M u_m^n, \Delta t \sum_{i=0}^{n-1} \varphi_m^i).$$

The proof of the existence theorem is based on Arzelà's theorem and the estimates of the differences of the „finite differences solution". The proved theorems enable us to solve actual problems of this type by the method of finite differences using the difference formula (*).