Recense

Aplikace matematiky, Vol. 2 (1957), No. 5, 398–407

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/102589

RECENSE

Ян Микусинский: **Операторное исчисление.** (*Jan Mikusiński:* Operátorový počet; ruský preklad z poľského originálu Rachunek operatorów.) Vydalo Издательство иностранной литературы, Moskva 1956, 366 strán, cena 15 r. 25 k.

Pretože Heavisideov operátorový počet viedie niekedy k chybným výsledkom, bolo od jeho pôvodného hľadiska upustené a prešlo sa k metóde založenej na Laplaceovej transformácii. V Mikusińského knihe je podaná nová, bezprostredná metóda operátorového počtu, ktorá je návratom k pôvodnému operátorovému hľadisku Haevisideovmu, pravda, s dôkladným matematickým zdôvodnením. Operátory sa zavádzajú algebraicky ako zlomky zvláštneho druhu, sú zovšeobecnením čísel a výkony s nimi sa prevádzajú analogicky výkonom s číslami. Takáto metóda je jednoduchšia ako metóda založená na Laplaceovej transformácii a je prístupná čitateľovi, ktorý neni oboznámený s teóriou analytických funkcií. Vyžaduje len znalosti základov analýzy. Napriek svojej jednoduchosti umožňuje vytvoriť kompletnú teóriu lineárnych parciálnych diferenciálnych rovníc s konštantnými koeficientami.

Východzím pojmom teórie podanej v knihe je konvolúcia dvoch funkcií triedy **C**

$$c(t) = \int_0^0 a(t - \tau)\, b(\tau)\, \mathrm{d}\tau\,.$$

Triedu **C** tvoria komplexné funkcie premennej t, definované a spojité v intervale $0 \leq \leq t < \infty$.

V operátorovom počte Mikusińského konvolúcia je analogická súčinu dvoch čísel v aritmetike, má tie isté vlastnosti (komutatívnosť, asociatívnosť, distributívnosť), preto sa stručne označuje ako súčin $c = ab$.

Utvorenie konvolúcie jednotkovej funkcie $\{1\}$ s funkciou $f(t)$

$$\{1\}\,\{f(t)\} = \int_0^t 1\,.\,f(\tau)\,\mathrm{d}\tau\,,$$

znamená vlastne integrovanie funkcie v medziach od 0 do t. Preto funkcia $\{1\}$ je operátorom integrovania l.

Veľké zátvorky $\{\}$ odlišujú funkciu od čísla a od hodnoty funkcie v bode t.

Výkon inverzný ku konvolúcii ab (b sa nerovná identicky nule) sa označuje zlomkom

$$\frac{c}{b} = a$$

a znamená takú funkciu a, ktorej konvolúcia s funkciou b dá funkciu c. Takáto funkcia neexistuje vždy. V takom prípade výraz $\frac{c}{b}$ definuje nový pojem, operátor. Do tohoto pojmu možno zahrnúť i funkcie triedy **C**, pretože každú možno vyjadriť v tvare $\frac{ab}{b}$, kde $b \neq 0$ je z triedy **C**, a operátor považovať za zovšeobecnenie funkcie.

Okrem toho do pojmu operátor patrí každé komplexné číslo λ, pretože každé možno vyjadriť v tvare zlomku

$$\lambda = \frac{\{\lambda\}}{\{1\}} = \frac{\{\lambda\}}{l}\,,$$

kde $\{\lambda\}$ je funkcia všade rovná konštante λ.

Pretože číslo λ není totožné s funkciou $\{\lambda\}$, ale je jej hodnotou v bode $t = 0$, možno ho interpretovať ako veľkosť impulzu v okamihu $t = 0$. Jednotkový impulz je vyjadrený jednotkovým operátorom

$$1 = \frac{\{1\}}{\{1\}}$$

Z uvedeného vyplýva, že funkcie, operátory a čísla patria do tej istej triedy zlomkov $\frac{c}{b}$, čo je charakteristickým rysom tejto metódy.

Výkony s operátormi sa prevádzajú tak, ako výkony s obyčajnými zlomkami.

Teraz je možné zaviesť niektoré pretržité funkcie. V knihe sú zavedené funkcie triedy **K**. Sú to komplexné funkcie premennej t s definičnou oblasťou $0 \leq t < \infty$, ktoré v každom konečnom intervale majú najviac konečný počet bodov pretržitosti a pre ktoré integrál

$$\int_0^t |f(\tau)|\,\mathrm{d}\tau$$

je konečný pre každé $t > 0$.

Funkcia $a(t)$, určená vzťahom

$$\{a(t)\} = lf = \{\int_0^t f(\tau)\,\mathrm{d}\tau\}\,,$$

kde $f \in \mathbf{K}$, je vždy spojitá, preto môžeme napísať

$$f = \frac{a}{l}\,.$$

Preto každú funkciu triedy **K** možno považovať za operátor.

Operátor inverzný k operátoru integrovania l je operátor diferencovania s

$$s = \frac{1}{l}\,.$$

Není funkciou. Jeho súčin s funkciou $a(t)$, ktorá má deriváciu triedy **K**, je operátor

$$sa = a' + a(0)\,,$$

kde a' je derivácia funkcie $a(t)$, $a(0)$ je hodnota funkcie v bode $t = 0$.

Jestli funkcia $a(t)$ má derivácie až po n-tú spojité v intervale $0 \leq t < \infty$, platí obecný vzorec

$$s^n = a^{(n)} + a^{(n-1)}(0) + sa^{(n-2)}(0) + \ldots + s^{(n-1)}a(0)\,.$$

Pomocou operátora s možno vyjadriť funkcie premennej t, na pr. exponenciálnu funkciu

$$\{e^{\alpha t}\} = \frac{1}{s - \alpha}\,.$$

To dáva možnosť obyčajné lineárne diferenciálne rovnice s konštantnými koefecientami previesť s ohľadom na počiatočné, okrajové alebo iné podmienky na obyčajné algebraické rovnice. Za tým účelom derivácie hľadanej funkcie a známe funkcie vyjadríme pomocou operátora s.

V prípade, že funkciu $f(t)$ na pravej strane nevieme previesť na operátorový tvar, v riešení operátorovej rovnice sa objaví výraz

$$\frac{1}{\alpha_n s^n + \ldots + \alpha_0} \{f(t)\} .$$

Po rozložení zlomku na elementárne zlomky a po ich prevedení na neoperátorový tvar dostaneme naznačený súčin funkcie $f(t)$ a výrazu v obecnom prípade zloženého z exponenciálnej a trigonometrických funkcií, na pr.

$$\frac{1}{s - \alpha} \{f(t)\} = \{e^{\alpha t}\} \{f(t)\} .$$

Tento súčin predstavuje konvolúciu

$$\int_0^t e^{\alpha(t-\tau)} f(\tau) \, \mathrm{d}\tau .$$

Po prevedení integrácie dostaneme konečný tvar riešenia danej diferenciálnej rovnice.

Pravda, je výhodnejšie funkciu $f(t)$ vyjadriť v operátorovom tvare, tým sa vyhneme integrovaniu.

Operátorové funkcie. Operátorová funkcia $f(\lambda)$ je funkcia, ktorá číslam λ priraďuje určité operátory. Podľa typu týchto operátorov funkcia $f(\lambda)$ je:

a) Parametrická, ak hodnotám λ sú priradené funkcie premennej t. Označuje sa $f(\lambda) = \{f(\lambda, t)\}$. Je to číselná funkcia dvoch premenných λ a t.

b) Číselná, ak hodnotám λ sú priradené číselné operátory.

c) Tretí typ operátorový funkcií nemá zvláštny názov. Sú to funkcie, ktoré číslam λ priraďujú operátory, ktoré nie sú ani číslami ani funkciami.

Operátorová funkcia $f(\lambda)$ je spojitá v konečnom intervale I, ak ju v tomto intervale možno vyjadriť ako súčin niektorého operátora q a takej parametrickej funkcie $f_1(\lambda_1) = \{f_1(\lambda, t)\}$, že funkcia dvoch premenných $f_1(\lambda, t)$ je spojitá v obyčajnom zmysle v oblasti $D(\lambda \in I,\ 0 \leq t < \infty)$:

$$f(\lambda) = q f_1(\lambda) .$$

Na pr. operátorová funkcia (Haevisideova)

$$h(\lambda) = \{h(\lambda, t)\} = \begin{Bmatrix} 0 & \text{pre } 0 \leq t < \lambda \\ 1 & \text{pre } 0 \leq \lambda \leq t \end{Bmatrix}$$

je spojitá v operátorovom zmysle, pretože $h(\lambda) = s\{h_1(\lambda, t)\}$, kde funkcia

$$h_1(\lambda, t) = \begin{cases} 0 & \text{pre } 0 \leq t < \lambda \\ t - \lambda & \text{pre } 0 \leq \lambda \leq t \end{cases}$$

je spojitá v obyčajnom zmysle.

Funkcia $H(\lambda) = sh(\lambda)$ $(\lambda \geq 0)$ už neni parametrickou, pretože jej hodnoty sú operátory, ktoré nie sú funkciami premennej t. Na pr. pri $\lambda = 0$ jej hodnota je číselný operátor $H(0) = 1$. Predsa však $H(\lambda)$ je spojitá v každom konečnom intervale, pretože

$$H(\lambda) = s^2\{h_1(\lambda, t)\} .$$

Pre túto funkciu možno dokázať, že $H(\lambda) \, . \, H(\mu) = H(\lambda + \mu)$ $(\lambda \geq 0,\ \mu \geq 0)$. Možno ju definovať i pre záporné hodnoty λ:

$$H(\lambda) = \frac{1}{H(-\lambda)} \text{ pre } \lambda < 0 .$$

Pripomína obyčajnú exponenciálnu funkciu.

Derivácia operátorovej funkcie. Pre aplikácie stačí definovať spojitú deriváciu operátorovej funkcie.

Operátorová funkcia $f(\lambda)$ má spojitú deriváciu v konečnom intervale I, ak ju možno vyjadriť ako súčin operátora q a takej parametrickej funkcie $f_1(\lambda) = \{f_1(\lambda, t)\}$, ktorá má parciálnu deriváciu $\left\{\frac{\partial}{\partial \lambda} f_1(\lambda, t)\right\}$ spojitú v oblasti $D(\lambda \in I,\ 0 \leqq t < \infty)$. Potom sa definuje:

$$f'(\lambda) = q\left\{\frac{\partial}{\partial \lambda} f_1(\lambda, t)\right\}.$$

Analogicky sú definované derivácie vyšších rádov.

Ak w je operátor, vtedy podmienky

$$x'(\lambda) = wx(\lambda)\,, \quad x(0) = 1$$

definujú zovšeobecnenú exponenciálnu funkciu, pravda, ak táto existuje. Pre ňu je ponechané označenie $e^{\lambda w}$. Jednoznačnosť určenia tejto funkcie vyplýva z vety o jednoznačnosti:

Ak sú dané operátory w, k a reálne číslo λ_0, vtedy existuje najviac jedna operátorová funkcia $x(\lambda)$, ktorá pre všetky reálne λ vyhovuje rovnici $x'(\lambda) = wx(\lambda)$ a podmienke $x(\lambda_0) = k$.

Spomenutá operátorová funkcia $H(\lambda)$ vyhovuje podmienkam

$$H'(\lambda) = -sH(\lambda)\,, \quad H(0) = 1$$

pri všetkých reálnych λ, preto sa píše v exponenciálnom tvare $H(\lambda) = e^{-\lambda s}$. Hodnoty tejto funkcie sú operátory posuvu.

Ak μ je kladné číslo, súčin $\mu e^{-\lambda s}$ znamená impulz veľkosti μ v okamihu $t = \lambda$. Číslo μ možno interpretovať ako impulz v okamihu $t = 0$. Táto interpretácia operátora $\mu e^{-\lambda s}$ vyplýva z nasledujúceho.

Podľa operátorového chápania postupnosť operátorov a_n konverguje k operátoru a, ak existuje operátor q a taká postupnosť funkcií $f_n \in \mathbf{C}$, že

I. postupnosť f_n konverguje k limite f rovnomerne v každom konečnom intervale $0 \leqq t \leqq t_0$;

II. $a_n = qf_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$;

III. $a = qf$.

Podľa toho postupnosť funkcií

$$\begin{cases} 0 & \text{pri} \quad 0 \leqq t < \lambda - \dfrac{1}{n}\,, \quad \lambda + \dfrac{1}{n} < t \\ \dfrac{n\mu}{2} & \text{pri} \quad \lambda - \dfrac{1}{n} < t < \lambda + \dfrac{1}{n} \end{cases}$$

konverguje k $\mu e^{-\lambda s}$, pretože postupnosť funkcií $l^2\{f_n(t)\}$ konverguje k $\mu l^2 e^{-\lambda s}$ rovnomerne v každom konečnom intervale $0 \leqq t \leqq t_0$ a $\{f_n(t)\} = s^2 l^2 \{f_n(t)\} \to \mu s^2 l^2 e^{-\lambda s} = \mu e^{-\lambda s}$.

Parciálne lineárne diferenciálne rovnice s konštantnými koeficientami. Mikusińského operátorový počet možno použiť na každú[1]) lineárnu parciálnu diferenciálnu rovnicu

[1]) Nie však na každú okrajovú úlohu, na pr. nie na Dirichletovu úlohu.

(v polorovine $(t \geqq 0, \lambda)$) s konštantnými koeficientami. Obecný tvar takej rovnice je

$$\sum_{\mu=0}^{m} \sum_{\nu=0}^{n} \alpha_{\mu\nu} \frac{\partial^{\mu+\nu} x}{\partial \lambda^{\mu} \partial t^{\nu}} = \varphi(\lambda, t) . \tag{1}$$

Pomocou obecného vzorca

$$\left\{\frac{\partial^{\nu} x(t)}{\partial t^{\nu}}\right\} = s^{\nu} \{x(t)\} - s^{\nu-1} x(0) - s^{\nu-2} x'(0) - \ldots - x^{\nu-1}(0)$$

parciálne derivácie hľadanej funkcie podľa t vyjadríme pomocou operátora s

$$\left\{\frac{\partial^{\mu+\nu} x(\lambda, t)}{\partial \lambda^{\mu} \partial t^{\nu}}\right\} = s^{\nu} \left\{\frac{\partial^{\mu} x(\lambda, t)}{\partial \lambda^{\mu}}\right\} - \sum_{\varkappa=0}^{\nu-1} s^{\nu-\varkappa-1} \frac{\partial^{\mu+\varkappa} x(\lambda, 0)}{\partial \lambda^{\mu} \partial t^{\varkappa}}, \tag{2}$$

danú funkciu $\varphi(\lambda, t)$ prevedieme na operátorový tvar, tým daná parciálna rovnica prejde na obyčajnú diferenciálnu operátorovú rovnicu

$$a_m x^{(m)} + \ldots + a_0 x = f(\lambda) .$$

Koeficienty a_{μ} $(\mu = 0, 1, \ldots, m)$ sú operátory

$$a_{\mu} = \alpha_{\mu n} s^{n} + \ldots + \alpha_{\mu 0} .$$

Známa operátorová funkcia

$$f(\lambda) = \varphi(\lambda, t) + \sum_{\varkappa=0}^{n-1} s^{n-\varkappa-1} \sum_{\mu=0}^{m} \sum_{\nu=0}^{\varkappa} \alpha_{\mu, n-\varkappa+\nu} \frac{\partial^{\mu+\nu} x(\lambda, 0)}{\partial \lambda^{\mu} \partial t^{\nu}}$$

je spojitá. $x = x(\lambda) = \{x(\lambda, t)\}$ je neznáma operátorová funkcia.

Vo zvláštnom prípade, keď koeficienty a_{μ} sú čísla a $f(\lambda)$ je číselná funkcia, rovnica (2) je obyčajná diferenciálna rovnica s konštantnými koeficientami (neoperátorová).

Riešenie homogénnej rovnice

$$a_m x^{(m)} + \ldots a_0 x = 0 \tag{3}$$

hľadáme v tvare exponenciálnej funkcie $e^{\lambda\mu}$. Po dosadení a skrátení prídeme k charakteristickej rovnici

$$a_m u^m + \ldots + a_0 = 0 \tag{4}$$

o ktorej predpokladáme, že má vždy m koreňov.[2]) Keď sú známe korene $w_1, w_2, \ldots, w_m$ charakteristickej rovnice, treba utvoriť exponenciálne funkcie $e^{\lambda w_{\mu}}$. Takéto funkcie však neexistujú vždy. Pri niektorých operátoroch w jediným riešením diferenciálnej rovnice $x' = wx$ je funkcia identicky rovná nule, preto nemôže byť splnená podmienka $x(0) = 1$, ktorej musí vyhovovať každá exponenciálna funkcia. Na pr. neexistuje exponenciálna funkcia $e^{i\lambda s}$ (λ je reálne).

Jestli existuje exponenciálna funkcia $e^{\lambda w}$, operátor w sa volá logaritmom (na pr. s, $\sqrt{s}$, $i + \sqrt{s}$). Vždycky možno rozhodnúť o tom, ktoré korene charakteristickej rovnice sú logaritmy a najsť im príslušné exponenciálne funkcie. Tieto funkcie vyhovujú operátorovej rovnici (3). Jestli charakteristická rovnica (4) má p koreňov logaritmov (zahrnujúc do toho i násobné korene), možno napísať p riešení rovnice (3):

$$x_1(\lambda), \ldots, x_p(\lambda) .$$

[2]) Predpoklad je splnený vždy, keď operátorová rovnica diferenciálna vznikla z parciálnej rovnice.

Ak $c_1, c_2, \ldots, c_p$ sú ľubovoľné operátory, funkcia

$$x(\lambda) = c_1 x_1(\lambda) + \ldots + c_p x_p(\lambda)$$

je obecným riešením rovnice (3). Počet obecných konštánt v ňom sa rovná počtu koreňov logaritmov charakteristickej rovnice.

Podľa počtu koreňov charakteristickej rovnice, ktoré sú logaritmami, sa rozlišujú tri typy diferenciálnych rovníc:

1. logaritmické, keď všetky sú logaritmami;
2. čisté, keď ani jeden koreň neni logaritmom;
3. zmiešané, keď niektoré korene sú logaritmami, ostatné nie.

Každé riešenie rovnice (3) v intervale (α, β) možno dostať z jej obecného riešenia vhodnou voľbou konštánt $c_1, \ldots, c_p$. To platí o logaritmických a zmiešaných rovniciach. Čisté rovnice majú len riešenia rovné identicky nule. Aby riešenie bolo jednoznačné, musí byť dané toľko podmienok, koľko konštánt je v obecnom riešení, t. j. ich počet sa musí rovnať počtu koreňov logaritmov charakt. rovnice. Toto sa zakladá na vete o jednoznačnosti:

Jestli sú dané operátory $k_0, k_1, \ldots, k_{m-1}$ a bod λ_0 intervalu (α, β), existuje najviac jedna operátorová funkcia $x(\lambda)$, ktorá v intervale (α, β) vyhovuje rovnici (3) a podmienkam

$$x(\lambda_0) = k_0\,, \quad x'(\lambda_0) = k_1, \ldots, x^{(m-1)}(\lambda_0) = k_{m-1}\,.$$

Obecné riešenie nehomogénnej rovnice

$$a_m x^{(m)} + \ldots + a_0 x = f(\lambda) \quad (a_0 \neq 0) \tag{5}$$

možno vždy najsť z obecného riešenia $x(\lambda)$ príslušnej skrátenej (homogénnej) rovnice pričítaním čiastočného riešenia $x_0(\lambda)$ úplnej rovnice (5). V niektorých zvláštnych prípadoch možno čiastočné riešenie ľahko najsť. Obecné riešenie rovnice (5) $x(\lambda) + x_0(\lambda)$ možno tou istou metódou ako v prípade homogénnej rovnice prispôsobiť daným počiatočným, okrajovým alebo iným podmienkam.

Aby funkcia $f(\lambda)$ bola určená, v uvažovanom intervale $\alpha < \lambda < \beta$ musia byť známe funkcie

$$\sum_{\mu=0}^{m} \sum_{\nu=0}^{\varkappa} \alpha_{\mu, n-\varkappa+\nu} \frac{\partial^{\mu+\nu} x(\lambda, 0)}{\partial \lambda^\mu \, \partial t^\nu} = g_\varkappa(\lambda)\,, \tag{6}$$

$$(\varkappa = 0, \ldots, n-1)$$

ktoré určujú chovanie sa funkcie $x(\lambda, t)$ na osi λ.

V niektorých prípadoch stačí poznať podmienky na osi λ v jednoduchom tvare Cauchyho

$$\frac{\partial^\varkappa x(\lambda, 0)}{\partial t^\varkappa} = h_\varkappa(\lambda) \quad (\varkappa = 0, 1, \ldots, n-1)\,. \tag{7}$$

Podmienky (6) a (7) sú ekvivalentné len pre nereštriktívne rovnice. Rovnica (5) neni reštriktívna, jestli

$$\alpha_{1n} = \ldots \alpha_{mn} = 0$$

Jestli rovnica je reštriktívna, podmienky (6) a (7) nie sú ekvivalentné, musia byť dané v tvare (6).

Čistá rovnica neni nikdy reštriktívna.

Aby bola zabezpečená jednoznačnosť riešenia, okrem podmienok (6) a (7), udávajúcich chovanie sa hľadanej funkcie na osi λ, musia byť známe ďalšie podmienky, ktoré určujú priebeh hľadanej funkcie na osi t, alebo na jednej príp. viacerých priamkach s ňou rovnobežných. Ich počet sa musí vždy rovnať počtu obecných konštánt v obecnom riešení, t. j. počtu koreňov logaritmov charakteristickej rovnice.

Teraz vzniká otázka, či operátorová diferenciálna rovnica (5) je úplne ekvivalentná parciálnej diferenciálnej rovnici (1).

V medziach triedy funkcií $x(\lambda, t)$, ktoré majú všetky parciálne derivácie $\dfrac{\partial^{\mu+\nu}x(\lambda, t)}{\partial\lambda^\mu\,\partial t^\nu}$, vyskytujúce sa v rovnici (1), spojité v oblasti D ($\alpha \leqq \lambda \leqq \beta$, $0 \leqq t < \infty$), rovnica (1) je pri počiatočných podmienkach (6) ekvivalentná operátorovej rovnici (5), uvažovanej v intervale $\alpha \leqq \lambda \leqq \beta$.

Každé riešenie rovnice s parciálnymi deriváciami (1), ktoré vyhovuje počiatočným podmienkam (6) a je parametrickou funkciou s príslušnými deriváciami je súčasne riešením príslušnej operátorovej rovnice (5). Avšak riešením operátorovej rovnice (5) sú aj operátorové funkcie, ktoré nie sú parametrické a preto nemôžu byť riešením parciálnej diferenciálnej rovnice (1).

Okrem toho, ako je ukázané na príklade rovnice kmitajúcej struny, riešením operátorovej rovnice sú aj funkcie, ktoré sú diferencovateľné potrebný počet ráz v operátorovom zmysle, ale v obyčajnom zmysle ich potrebný počet ráz nemožno diferencovať, a predsa majú fyzikálny zmysel. Pre aplikácie nepostačuje teda trieda riešení, ktoré majú derivácie, vyskytujúce sa v parciálnej rovnici, spojité.

Jediné riešenie diferenciálnej rovnice dostaneme v operátorovom tvare, treba ho previesť na obyčajný, neoperátorový tvar. Je nedostatkom knihy, že túto otázku nerieši obecne.

Ako pripomína prekladateľ do ruštiny A. I. Plesner, jestli úloha je korektne zostavená a jediným riešením operátorovej diferenciálnej rovnice je funkcia, ktorá nenì parametrickou a ktorú tedy nemožno vyjadriť ako obyčajnú funkciu premenných λ a t, vtedy v dôsledku vety o jednoznačnosti daná úloha nemá riešenie.

V poslednej kapitole je porovnanie bezprostrednej metódy s metódou Laplaceovej transformácie. Medzi nimi je formálna zhoda. Na pr. Laplaceova transformácia funkcie e^t je analytická funkcia komplexnej premennej p

$$\mathbf{L}\{e^t\} = \frac{1}{p-1}\,.$$

V bezprostrednej metóde platí vzorec

$$\{e^t\} = \frac{1}{s-1}\,.$$

Zlomok $\dfrac{1}{s-1}$ je operátorom. Vo formálnych výpočtoch s obidvoma symbolmi zachádzame rovnako. Formálna zhoda dovoľuje pri bezprostrednej metóde používať tabuľky Laplaceových transformácií.

Napriek tejto formálnej zhode obe metódy nie sú ekvivalentné: Metóda Laplaceovej transformácie je obmedzená na funkcie $f(t)$, pre ktoré integrál

$$\int_0^\infty e^{-pt} f(t)\,\mathrm{d}t$$

je konvergentný. Preto nevieme, či najdené riešenie je jediné. Oblasť bezprostrednej metódy Mikusińského je tedy širšia ako klasickej, nakoľko pri nej nemusia byť splnené tieto predpoklady.

Pre praktika je zaiste dôležitou otázka, aký prínos znamená Mikusińského metóda v porovnaní s Laplaceovou transformáciou po stránke početnej efektívnosti. Až na transformáciu na začiatku a zpätnú transformáciu na konci výpočtov všetky formálne výpočty sú rovnaké. Vcelku, možno povedať, po tejto stránke Mikusińského metóda není prínosom. Treba však mať na mysli, že jej hlavnou prednosťou je to, že rieši dôležitú otázku, ako majú byť dané počiatočné a okrajové podmienky, aby vyšlo jediné riešenie.

V tejto súvislosti treba uviesť pripomienky redakcie Aplikace matematiky pisateľovi týchto riadkov. V Mikusińského teórii nie sú doteraz riešené niektoré operátorové úlohy, ktoré boli Laplaceovou transformáciou už spracované, na pr. lineárne diferenčné rovnice a niektoré druhy lineárnych rovníc s premennými koeficientami. Otázkou ostáva aj to, ktoré z hlbších pravidel pre tvorenie Laplaceovho obrazu možno previesť do Mikusińského teórie.

Značná časť knihy je venovaná aplikáciam. V prvej časti v súvislosti s riešením obyčajných diferenciálnych rovníc sú uvedené aplikácie na teóriu elektrických obvodov. V druhej časti je operátorová metóda použitá na riešenie rovnice kmitajúcej struny, rovnice vedenia tepla a telegrafnej rovnice, tejto len pre nekonečne dlhé vedenie. Pri tom není použité Fourierovho integrálu.

Kniha je určená inžinierom, matematikom a poslucháčom vysokých škôl. Okrem niektorých kapitol, ktoré majú význam viac pre matematika ako pre technika, je napísaná tak, že výklady autora môže technik dobre porozumeť. V celej knihe sú sústavne uvádzané príklady a cvičenia, ktorých riešenia sú v závere knihy. U ťažších cvičení je uvedený postup riešenia. V závere knihy sú aj tabuľky špeciálnych funkcií: gammafunkcie, funkcie chýb a Besselových funkcií.

Ruský preklad A. I. Plesnera je doplnený dvoma dôkazmi tvrdení, ktorých dôkazy v origináле nie sú, a operáciou podobnosti, ktorá umožuje zo známych vyjadrení funkcií premennej t operátorom s odvodiť nové.

Vojtech Hanula

Populární přednášky o matematice

Státní nakladatelství technické literatury vydává pro studenty jedenáctiletek a průmyslových škol a pro posluchače nižších semestrů škol vysokých pěknou knižnici, která má název „*Populární přednášky o matematice*". Od roku 1953, kdy vyšlo první číslo této knižnice, dostala tak naše mládež do rukou už 17 brožur. Jde vesměs o překlady z ruštiny, při čemž mezi autory této knižnice najdeme jména známých sovětských matematiků.

Celou knižnici bychom mohli rozdělit na dvě skupiny: některé brožury se zabývají thematy theoretickými, jiné se obracejí k aplikacím. Chtěli bychom zde podrobněji promluvit o skupině druhé[1]), která by mohla zajímat i mnohé čtenáře tohoto časopisu[2]).

V 11. svazku je obsažena přednáška *I. P. Natansona* „*Sčítání nekonečně malých veličin*", k jejímuž českému vydání napsal předmluvu akademik *E. Čech* (vyšlo v září 1955, 72 stran, 26 obrázků, cena Kčs 3,16). Autor si klade za úkol seznámit čtenáře na řadě jednoduchých příkladů s pojmem určitého integrálu. Při tom se nepředpokládá znalost dife-

[1]) Z brožur s theoretickou náplní jmenujme jen „*Nerovnosti*" od *P. P. Korovkina* (sv. 5), „*Neurčité rovnice*" od *A. O. Gelfonda* (sv. 6) a konečně knížku „*O důkazu v geometrii*" od *A. I. Fetisova* (sv. 14).

[2]) Upozorňujeme, že zevrubnější recense jednotlivých svazků vyšly v *Časopise pro pěstování matematiky*, sv. 80 (1955), 81 (1956) a 82 (1957) a v *Matematice ve škole*, roč. V. (1955) a VII. (1957).

renciálního počtu; není zde ani zavedeno obvyklé označování integrálu. Vzhledem k propedeutické povaze dílka je pochopitelné, že všechny úvahy nemohou zde být provedeny zcela přesně: na mnohých místech se autor musí odvolávat na názor (zvláště při používání pojmu limity). Z fysikálních aplikací, které jsou v knížce podrobně probrány, jmenujme úlohu o tlaku kapaliny na svislou stěnu (různých tvarů), o práci potřebné k vyčerpání kapaliny z různých nádob a o výpočtu efektivního proudu. Závadou knížky je okolnost, že autor nerozlišuje mezi přesnou hodnotou integrálu a mezi jeho hodnotou přibližnou (mezi obě klade prostě rovnítko).[3])

Jako 12. svazek vyšla knížka *A. I. Markuševiče* „*Komplexní čísla a konformní zobrazení*"; k českému vydání napsal předmluvu doc. *J. Vyšín* (vyšlo v listopadu 1955, 76 stran, 45 obrázků, cena Kčs 2,75). Zavedení komplexních čísel patří jistě mezi myšlenkově nejobtížnější kapitoly školské matematiky a mnoho studentů odchází dnes ze střední školy bez jasné představy, k čemu může tato nauka prakticky sloužit. Markuševičova knížka nejen že seznamuje čtenáře s komplexními čísly (předběžná znalost této nauky se nepředpokládá), nýbrž po zavedení pojmů funkce komplexní proměnné a konformního zobrazení informuje o aplikabilitě celé partie v různých technických oborech. Vedle použití v kartografii je zvláštní pozornost věnována aplikacím konformního zobrazení při konstrukci profilu křídel letadla. Na mnohých místech jde zde ovšem zase o přibližný výklad, který je opřen jen o názor. Česká redakce doplnila knížku řadou poznámek pod čarou, jimiž jsou také opraveny některé drobné nedostatky originálu. Brožuru mohou se zdarem číst studenti odborných a středních škol a prospěje i posluchačům na technice.

S předmluvou Ing. *M. Ullricha* vyšel v prosinci 1956 jako 16. svazek knižnice spisek *V. G. Boltjanského* „*Co to je derivace*" (80 stran, 15 obrázků, cena Kčs 2,56). Na fysikálních a technických příkladech se tu autor snaží seznámit mladého čtenáře s pojmem derivace a diferenciální rovnice; na mnoha místech je mu pomocníkem fysikální názor. Tak je zde probrána úloha o padajícím tělese (oživená konkretními údaji o výkonech výsadkářů), dále úlohy o zapojení elektrického proudu a o radioaktivním rozpadu. Jedna kapitola je věnována harmonickým kmitům a v závěru jsou probrány ještě další aplikace pojmu derivace (extrémy funkce a úloha o tečně). Kapitola o Schwarzově válci, ve které se ukazuje, že není možno definovat povrch válce jako limitu povrchů vepsaných mnohostěnů, má sice theoretický ráz, doporučuji však, aby si ji pozorně prostudoval i čtenář technik: ukazuje se v ní totiž, že názor může vést leckdy k úplně falešným závěrům.

Pokud se ještě uspořádání látky týče, bylo by jistě vhodnější, kdyby autor probral pojem funkce hned na začátku svého spisku (zde je to provedeno až na str. 63); pak by se totiž nemusel uchylovat k různým „náhražkovým" obratům (vztah, závislost a pod.).

Závěrem chceme upozornit ještě na 17. svazek, který obsahuje přednášku *G. M. Mirakjana* „*Šroubovice*" (vyšlo v únoru 1957, 60 stran, 31 obrázků, cena Kčs 1,25). Název spisku je trochu nevhodný, neboť o šroubovici jedná vlastně jen jedna z osmi kapitol knížky, kdežto ostatní jsou věnovány jiným zajímavým vlastnostem válcové plochy.[4]) Z aplikací jmenujme jen úlohu o kinetické energii otáčejícího se válce a o výtoku kapaliny z válcové nádoby. Důkaz, že rovinným řezem válce je (za jistých předpokladů) elipsa, není úplný (str. 21). Jinak je knížka psána velmi přístupně a získá si jistě mnoho zájemců mezi našimi studenty.

---

[3]) Tento nedostatek, na který upozorňuje také předmluva k českému vydání, je odstraněn ve vydání druhém, které bylo doplněno podle druhého vydání vyšlého nedávno v SSSR.

[4]) V ruském originálu má brožura název „Прямой круговой цилиндр".

Všechny čtyři přednášky, o nichž jsme zde mluvili, přeložil Ing. *M. Ullrich*. Na konec vyslovujeme přání, aby Státní nakladatelství technické literatury pokračovalo dále ve vydávání této pěkné knižnice.

Jiří Sedláček

Další vydané knihy

J. Ducháček: **Nauka o pružnosti a pevnosti I.** Vydalo Státní nakladatelství technické literatury, Praha 1957, 544 stran, 263 obrazů, cena Kčs 52,50.

Vysokoškolská učebnice.

Jur Hronec: **Diferenciálny a integrálny počet I.** Třetí přepracované vydání vydalo Slovenské vydavateľstvo technickej literatúry, Bratislava 1957, 288 stran, 39 obrazů, cena Kčs 22,—.

Nové vydání učebnice pro studující matematiky na Přírodovědecké fakultě a na Vysoké škole pedagogické.