

# Aplikace matematiky

---

Josef Hecht

Poznámka k řešení soustav algebraických lineárních rovnic

*Aplikace matematiky*, Vol. 3 (1958), No. 3, 233--237

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/102619>

## Terms of use:

© Institute of Mathematics AS CR, 1958

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

POZNÁMKA K ŘEŠENÍ SOUSTAV ALGEBRAICKÝCH LINEÁRNÍCH ROVNIC

JOSEF HECHT

(Došlo dne 2. října 1957.)

DT: 512.25

V článku je navržen způsob, jak doplnit rozšířenou matici koeficientů a pravých stran soustavy lineárních algebraických rovnic, aby bylo možno vypočísti Milneovou metodou nejen rozklad dané matice koeficientů na součin dvou trojúhelníkových matic a změněnou pravou stranu, ale i samotné hodnoty neznámých, takže celé řešení soustavy bude zcela jednotné. Je také uvedena varianta navrženého postupu.

V čísle 3 (1957) časopisu Aplikace matematiky, v příloze nazvané Numerická praxe, uvedla O. Pokorná Milneovo schéma pro rozklad čtvercové matice nesymetrické na součin dvou trojúhelníkových matic. Pravá má jedničky v diagonále a nuly pod ní. Schéma je doplněno výpočtem součinu inverzní matice k levé trojúhelníkové a vektoru pravé strany. Celé schéma je určeno pro řešení soustav lineárních algebraických rovnic.

Milneova metoda fakticky končí výpočtem pravé trojúhelníkové matice a součinu inverzní matice k levé s vektorem pravé strany rovnic. Pak nastupuje obvyklý zpětný pochod za účelem výpočtu neznámých.

Budiž  $A$  matice koeficientů u neznámých v dané soustavě,  $r$  vektor pravé strany. Matici  $A$  možno rozložit na součin trojúhelníkových matic  $L$  a  $T$  (při čemž  $T$  má jedničky v diagonále). Pak z rovnice  $Ax = r$  obdržíme  $Tx = L^{-1}r$ .

Zde nastupuje doplněk, na který chcí upozorniti. Zlepšením tzv. metody „pod čarou“ [1] můžeme Milneovým postupem vypočísti nejen matici  $T$ , ale i samotné neznámé.

Za tím účelem doplníme matici  $A$  typu  $(n, n)$  na matici typu  $(2n, 2n)$  takto:

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ E & -E \end{pmatrix}, \text{ a vektor } r \text{ na } \begin{pmatrix} r \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Zde značí  $0$  nulovou matici a  $0$  nulový vektor. Místo dané maticové rovnice řešíme

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ E & -E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ \xi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Tvrdíme, že převodem složené matice na trojúhelníkovou s nulami pod diagonálou a jedničkami v ní, a tomu odpovídající úpravou pravé strany obdržíme na místo vektoru  $\mathbf{o}$  na pravé straně vektor numerických hodnot neznámých.

$$\text{Matici } \begin{vmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ \mathbf{E} & -\mathbf{E} \end{vmatrix} \text{ rozložíme na součin matic } \begin{vmatrix} \mathbf{L}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{S} & \mathbf{L}_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \mathbf{T}_1 & \mathbf{T} \\ \mathbf{0} & \mathbf{T}_2 \end{vmatrix}.$$

Násobení provedeme a srovnáme součin s danou maticí:

$$\begin{vmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ \mathbf{E} & -\mathbf{E} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{L}_1\mathbf{T}_1 & \mathbf{L}_1\mathbf{T} \\ \mathbf{S}\mathbf{T}_1 & \mathbf{S}\mathbf{T} + \mathbf{L}_2\mathbf{T}_2 \end{vmatrix}.$$

Z toho plyne

$\mathbf{A} = \mathbf{L}_1\mathbf{T}_1$ , což je známý rozklad matice  $\mathbf{A}$ ;

$\mathbf{0} = \mathbf{L}_1\mathbf{T}$ , takže  $\mathbf{T} = \mathbf{0}$ ;

$\mathbf{E} = \mathbf{S}\mathbf{T}_1$ , je tedy  $\mathbf{S} = \mathbf{T}_1^{-1}$ ;

$-\mathbf{E} = \mathbf{S}\mathbf{T} + \mathbf{L}_2\mathbf{T}_2$ ,  $-\mathbf{E} = \mathbf{L}_2\mathbf{T}_2$ . Poněvadž pro tyto matice není jiných podmínek než to, že  $\mathbf{L}_2$  má nuly nad diagonálou a  $\mathbf{T}_2$  nuly pod ní s jedničkami v diagonále, zvolme  $\mathbf{L}_2 = -\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{T}_2 = \mathbf{E}$ . Budeme nyní mít

$$\begin{vmatrix} \mathbf{L}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{T}_1^{-1} & -\mathbf{E} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \mathbf{T}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{E} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \mathbf{x} \\ \boldsymbol{\xi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{r} \\ \mathbf{o} \end{vmatrix},$$

z toho dále

$$\begin{vmatrix} \mathbf{T}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{E} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \mathbf{x} \\ \boldsymbol{\xi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{L}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{T}_1^{-1} & -\mathbf{E} \end{vmatrix}^{-1} \begin{vmatrix} \mathbf{r} \\ \mathbf{o} \end{vmatrix}.$$

Položme

$$\begin{vmatrix} \mathbf{L}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{T}_1^{-1} & -\mathbf{E} \end{vmatrix}^{-1} \begin{vmatrix} \mathbf{r} \\ \mathbf{o} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{t} \\ \boldsymbol{\tau} \end{vmatrix},$$

takže je

$$\begin{vmatrix} \mathbf{r} \\ \mathbf{o} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{L}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{T}_1^{-1} & -\mathbf{E} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \mathbf{t} \\ \boldsymbol{\tau} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{L}_1\mathbf{t} \\ \mathbf{T}_1^{-1}\mathbf{t} - \boldsymbol{\tau} \end{vmatrix}.$$

Srovnáním dostaneme:

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= \mathbf{L}_1\mathbf{t} \therefore \mathbf{t} = \mathbf{L}_1^{-1}\mathbf{r}, \\ \mathbf{o} &= \mathbf{T}_1^{-1}\mathbf{t} - \boldsymbol{\tau} \therefore \boldsymbol{\tau} = \mathbf{T}_1^{-1} \cdot \mathbf{L}_1^{-1}\mathbf{r}. \end{aligned}$$

Poněvadž  $\mathbf{L}_1\mathbf{T}_1 = \mathbf{A}$ , je  $\mathbf{T}_1^{-1}\mathbf{L}_1^{-1} = \mathbf{A}^{-1}$  a  $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{r}$ , a tedy dle původní rovnice  $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{r}$  je  $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{x}$ , což bylo dokázati.

Při této úpravě neběží o úsporu na početních úkonech, ale o jednodušnost celého řešení od první eliminace až po výpočet neznámých, což by se uplatnilo zejména při strojové zautomatizované práci.

Tato metoda má ještě variantu s transponovanou maticí. Vyjděme od vroubené matice

$\begin{vmatrix} \mathbf{A}' & \mathbf{0} \\ \mathbf{r}' & -1 \end{vmatrix}$ , v níž je  $\mathbf{0}$  nulový vektor o  $n$  prvcích,  $\mathbf{r}'$  je transponovaný vektor pravé strany dané soustavy. Místo  $\mathbf{Ax} = \mathbf{r}$  řešíme zároveň  $n$  soustav

$$\begin{vmatrix} \mathbf{A}' & \mathbf{0} \\ \mathbf{r}' & -1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \mathbf{u} \\ \xi \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 \\ 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \mathbf{e}_2 \\ 0 \end{vmatrix}, \dots, \begin{vmatrix} \mathbf{e}_n \\ 0 \end{vmatrix}.$$

Znakem  $\mathbf{e}_i$  vyjadřujeme vektor, který má za  $i$ -tý prvek jedničku, na ostatních místech nuly. Převědeme-li matici levé strany na trojúhelníkový tvar, budou po odpovídající úpravě pravých stran na místě poslední nuly (prvek  $(n+1)$ ) ve vektorech hodnoty  $x_i$ .

Provedme:

$$\begin{vmatrix} \mathbf{A}' & \mathbf{0} \\ \mathbf{r}' & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{L}_3 & \mathbf{0} \\ \mathbf{s}' & \alpha \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \mathbf{T}_3 & \mathbf{t} \\ \mathbf{o}' & 1 \end{vmatrix}.$$

Porovnání dá tyto rovnice:

$$\mathbf{L}_3 \mathbf{T}_3 = \mathbf{A}', \text{ opět známý rozklad;}$$

$$\mathbf{L}_3 \mathbf{t} = \mathbf{0} \therefore \mathbf{t} = \mathbf{0};$$

$$\mathbf{s}' \mathbf{T}_3 = \mathbf{r}' \therefore \mathbf{s}' = \mathbf{r}' \mathbf{T}_3^{-1};$$

$$\mathbf{s}' \mathbf{t} + \alpha = -1 \therefore \alpha = -1.$$

Máme proto :

$$\begin{vmatrix} \mathbf{T}_3 & \mathbf{0} \\ \mathbf{o}' & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \mathbf{u} \\ \xi \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{L}_3 & \mathbf{0} \\ \mathbf{r}' \mathbf{T}_3^{-1} & -1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \mathbf{e}_i \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{z} \\ \tau \end{vmatrix}.$$

Jako dříve napíšeme

$$\begin{vmatrix} \mathbf{e}_i \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{L}_3 & \mathbf{0} \\ \mathbf{r}' \mathbf{T}_3^{-1} & -1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \mathbf{z} \\ \tau \end{vmatrix}$$

a dostaneme:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_i &= \mathbf{L}_3 \mathbf{z} \therefore \mathbf{z} = \mathbf{L}_3^{-1} \mathbf{e}_i \\ 0 &= \mathbf{r}' \mathbf{T}_3^{-1} \mathbf{z} - \tau \therefore \mathbf{r}' \mathbf{T}_3^{-1} \cdot \mathbf{L}_3^{-1} \mathbf{e}_i = \tau \end{aligned}$$

Protože je

$$\mathbf{L}_3 \mathbf{T}_3 = \mathbf{A}', \text{ je } \mathbf{T}_3^{-1} \mathbf{L}_3^{-1} = \mathbf{A}'^{-1}, \text{ tedy } \mathbf{r}' \mathbf{T}_3^{-1} \mathbf{L}_3^{-1} \mathbf{e}_i = \mathbf{r}' \mathbf{A}'^{-1} \mathbf{e}_i = \tau.$$

Dále je  $\mathbf{Ax} = \mathbf{r}$ ,  $\mathbf{x}' \mathbf{A}' = \mathbf{r}'$ , a proto  $\tau = \mathbf{x}' \mathbf{A}' \mathbf{A}'^{-1} \mathbf{e}_i = \mathbf{x}' \mathbf{e}_i$ , což dává právě složku  $X_i$ .

Přednost dáme ovšem první variantě, které lze přehledněji upotřebit při změně pravých stran rovnic, např. při výpočtu korekčních členů k hodnotám neznámých z prvního přiblížení.

Nakonec uvádíme příklad z článku O. Pokorné, vypočítaný podle navržené úpravy. Upozorňujeme, že políčka, obsazená v tabulce B nulami, jedničkami kladnými i zápornými, zůstávají takovými vždy, a možno je proto vyplnit bez počítání napřed. Kontrolní sloupec nebyl zatím počítán.

LITERATURA

- [1] Pokorná O.: Řešení soustav lineárních algebraických rovnic, Stroje na zpracování informací, Sborník III, Praha 1955.

Tabulka A.

6,4375	2,1849	-3,7474	1,8822	0	0	0	0		4,6351
2,1356	5,2101	1,5220	-1,1234	0	0	0	0		5,2131
-3,7362	1,4998	7,6421	1,2324	0	0	0	0		5,8665
1,8666	-1,1104	1,2460	8,3312	0	0	0	0		4,1322
1	0	0	0	-1	0	0	0		0
0	1	0	0	0	-1	0	0		0
0	0	1	0	0	0	-1	0		0
0	0	0	1	0	0	0	-1		0

Tabulka B.

6,4375	0,339402	-0,582120	0,292381	0	0	0	0		0,720016
2,1356	4,485273	0,616501	-0,389677	0	0	0	0		0,819445
-3,7362	2,767874	3,760786	0,904963	0	0	0	0		1,672125
1,8666	-1,743928	3,407719	4,022013	0	0	0	0		-0,368189
1	-0,339402	0,791361	-1,140787	-1	0	0	0		2,185173
0	1	-0,616501	0,947587	0	-1	0	0		-0,560311
0	0	1	-0,904963	0	0	-1	0		2,005321
0	0	0	1	0	0	0	-1		-0,368189

Резюме

ЗАМЕТКА К РЕШЕНИЮ СИСТЕМ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ  
ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

ИОСЕФ ГЕХТ (Josef Hecht)

(Поступило в редакцию 2/X 1957 г.)

Если при решении системы линейных алгебраических уравнений  $Ax = r$  пользуемся для вычислений известной схемой Мильна (Milne), то мы, наконец, должны провести обратные приемы, чтобы найти значения неизвестных. Как показано в статье, можно вместо этого взять систему вида

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ E & -E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ \xi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Если теперь применить схему Мильна, то получим не только обе треугольные матрицы, как обычно, но в правой части вместо нулевого вектора и значения неизвестных. Решение таким образом становится единым.

Видоизменением этого метода получим одновременно решение  $n$  систем уравнений с той же левой частью  $\begin{vmatrix} \mathbf{A}' & \mathbf{0} \\ \mathbf{r}' & -1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \mathbf{u} \\ \xi \end{vmatrix}$  и правыми частями вида  $\begin{vmatrix} \mathbf{e}_i \\ 0 \end{vmatrix}$ , где только  $i$ -ый элемент равен единице, остальные равны нулю.

Описанный метод является усовершенствованием т. наз. метода „под чертой“. По мнению автора можно было бы этот метод использовать и при работе с вычислительными машинами.

### Summary

## A NOTE ON THE SOLUTION OF SYSTEMS OF LINEAR ALGEBRAIC EQUATIONS

JOSEF HECHT

(Received October 2, 1957.)

In Milne's method of solving systems of linear algebraic equations  $\mathbf{Ax} = \mathbf{r}$ , in order to find the unknowns after taking into triangular form, it is necessary to perform the inverse steps. However, if this method is applied directly to the system

$$\begin{vmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ \mathbf{E} & -\mathbf{E} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \mathbf{x} \\ \xi \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{r} \\ \mathbf{0} \end{vmatrix},$$

the unknowns appear in the place of the zero-vector.

A variant solves simultaneously a set of  $n$  systems of equations

$$\begin{vmatrix} \mathbf{A}' & \mathbf{0} \\ \mathbf{r}' & -1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \mathbf{u} \\ \xi \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_i \\ 0 \end{vmatrix},$$

where  $\mathbf{e}_i$  has zero coordinates except for a unity  $i$ -th coordinate.

In the author's opinion this could be of use with computers.