

Aplikace matematiky

Miloslav Hampl

Řešení algebraické rovnice čtvrtého stupně

Aplikace matematiky, Vol. 4 (1959), No. 6, 463--465

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/102685>

Terms of use:

© Institute of Mathematics AS CR, 1959

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

ŘEŠENÍ ALGEBRAICKÉ ROVNICE ČTVRTÉHO STUPNĚ

MILOSLAV HAMPL

(Došlo dne 23. března 1959.)

DT: 512.393:512.37

Lineární transformací se převede rovnice čtvrtého stupně na rovnici stupně třetího tak, že kterýkoliv z kořenů této rovnice vede na úplné řešení rovnice původní.

Do rovnice

$$f(x) = x^4 + a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4 = 0 \tag{1}$$

zavedme novou neznámou y substitucí

$$x = y + k. \tag{2}$$

Tak dostaneme pro y rovnici:

$$f_1(y) = f(y + k) = f(k) + f'(k)y + \frac{1}{2}f''(k)y^2 + \frac{1}{6}f'''(k)y^3 + y^4 = 0. \tag{3}$$

Dělením této rovnice y^2 dostaneme po úpravě:

$$y^2 + \frac{f}{y^2} + \frac{1}{6}f''' \left(y + \frac{f'}{\frac{1}{6}f''} \frac{1}{y} \right) + \frac{1}{2}f'' = 0 \tag{4}$$

(argument k pro jednoduchost vynecháme).

Označme

$$p = \frac{f'}{\frac{1}{6}f''}. \tag{5}$$

Zvolíme-li dosud neznámé k tak, aby vedle rovnice (5) platilo současně

$$p^2 = f, \tag{5'}$$

tj. aby k hovělo rovnici

$$ff''' = 36f'^2, \tag{6}$$

přejde rovnice (4) do tvaru

$$z^2 + \frac{1}{6}f'''z + \frac{1}{2}f'' - 2p = 0, \tag{7}$$

kde

$$z = y + \frac{p}{y}. \tag{8}$$

Rovnice (6) po dosazení a úpravě vede na rovnici třetího stupně pro k

$$A_1 k^3 + A_2 k^2 + A_3 k + A_4 = 0, \quad (9)$$

kde

$$\begin{aligned} A_1 &= a_1^3 - 4a_1 a_2 + 8a_3, \\ A_2 &= a_1^2 a_2 + 2a_1 a_3 - 4a_2^2 + 16a_4, \\ A_3 &= a_1^2 a_3 + 8a_1 a_4 - 4a_2 a_3, \\ A_4 &= a_1^2 a_4 - a_3^2. \end{aligned} \quad (10)$$

Výraz (5) pro p se pomocí rovnice (9) dá psáti

$$p = \frac{1}{A_1} (3A_1 k^2 + 2A_2 k + A_3), \quad (11)$$

pokud je

$$A_1 = a_1^3 - 4a_1 a_2 + 8a_3 \neq 0.$$

(Případ $A_1 = 0$ je triviální, neboť volbou $k = -\frac{a_1}{4}$ přejde původní rovnice (1) na rovnici, která obsahuje pouze sudé mocniny y a dá se tedy snadno řešiti.)

Postup řešení:

Z koeficientů a_i rovnice (1) stanovíme podle (10) koeficienty A_i kubické rovnice (9) pro neznámou k a dále výraz pro p podle rovnice (11).

Kterýkoli kořen k rovnice (9) dosadíme do kvadratické rovnice (7) pro z . Tato rovnice po vyjádření f''' , f'' a p se dá psáti

$$z^2 + (4k + a_1)z + \frac{1}{A_1} \{(3a_1 A_1 - 4A_2)k + a_2 A_1 - 2A_3\} = 0. \quad (12)$$

Řešení této rovnice se dá pomocí rovnice (9) upravit takto:

$$z_{1,2} = -\frac{1}{2} \left\{ 4k + a_1 \pm \sqrt{\frac{A_1}{4k + a_1}} \right\}. \quad (13)$$

Z kvadratické rovnice (8)

$$y^2 - z_{1,2}y + p = 0$$

dostaneme dva páry kořenů $y_{1,2,3,4}$, a dosazením do rovnice (2) všechny čtyři kořeny

$$x_{1,2,3,4} = y_{1,2,3,4} + k.$$

Резюме

РЕШЕНИЕ АЛГЕБРАИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ЧЕТВЕРТОЙ СТЕПЕНИ

МИЛОСЛАВ ГАМПИЛ (Miloslav Hampl)

(Поступило в редакцию 23/III 1959 г.)

Посредством удобного линейного преобразования (сдвига) получается из общего уравнения четвертой степени уравнение обратное обобщенное которое можно простым способом решить. Надлежащее преобразование определяется по уравнению третьей степени. Какой-либо из трех корней этого уравнения в сложении с двумя парами корней упомянутого обратного уравнения даст полное решение первоначально заданного уравнения степени.

Summary

THE SOLUTION OF BIQUADRATIC EQUATIONS

MILOSLAV HAMPL

(Received March 23rd, 1959.)

The general biquadratic equation is transformed into a generalized reciprocal equation by a linear substitution (a translation); the solution of the reciprocal equation is then simple. The translation is determined by a cubic equation; any one of its three roots together with two pairs of roots of the reciprocal equation yields the complete solution of the original biquadratic.