

Aplikace matematiky

Josef Kolomý

Užití Galerkinovy metody v úlohách o stabilitě proudění vazké tekutiny

Aplikace matematiky, Vol. 5 (1960), No. 1, 40--44

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/102692>

Terms of use:

© Institute of Mathematics AS CR, 1960

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

UŽITÍ GALERKINOVY METODY V ÚLOHÁCH O STABILITĚ
PROUDĚNÍ VAZKÉ TEKUTINY

JOSEF KOLOMÝ

(Došlo dne 26. října 1958)

V článku se dokazuje konvergence Galerkinovy metody pro úlohy o stabilitě proudění vazké tekutiny proudící mezi dvěma rotujícími válci.

Nejdříve uvedeme některé věty a definice. Ostatní definice zde nepodané jsou obsaženy v knize S. G. MICHLINA [1] v tom znění, v jakém jich budeme používat.

Označme symbolem Ω otevřenou a omezenou oblast m -rozměrného Eukleidova prostoru E_m , $\bar{\Omega}$ její uzávěr, H úplný separabilní Hilbertův prostor a D_k definiční obor operátoru K v prostoru H .

Věta 1. *Nechť je $l > 0$ celé číslo, $\bar{\Omega} \subset E_m$. Nechť V je množina funkcí l -krát spojitě diferencovatelných v $\bar{\Omega}$ a vyhovujících libovolným okrajovým homogenním podmínkám. Potom V je hustá v $L_2(\Omega)$ ([2], § 16).*

Definice 1. *Nechť operátor A_0 je definován na lineálu M hustém v H . Řekneme, že operátor A_0 je kladně definitní na M , existuje-li konstanta $\gamma > 0$ tak, že pro každé $u \in M$ je*

$$(A_0 u, u) \geq \gamma^2 \|u\|^2.$$

Věta 2. *Nechť lineál M je hustý v H a nechť A_0 je kladně definitní na M . Potom A_0 lze rozšířit na samodružný (sám sobě adjungovaný) operátor. ([1], § 19.)*

Definice 2. *Buď A_0 samodružný kladně definitní operátor definovaný na lineálu M hustém v H . Zavedme Hilbertův prostor tím, že na lineálu M definujeme skalární součin vztahem*

$$[u, v] = (A_0 u, v).$$

V tomto prostoru je norma dána vzorcem

$$|v|^2 = (A_0 v, v).$$

Takto získaný prostor nemusí být úplný. Doplníme-li jej obvyklým způsobem limitními prvky, je takto rozšířený prostor již úplný. Tento prostor označíme symbolem H_0 .

Věta 3. *Nechť μ je parametrem rovnice*

$$(1) \quad A_0 v - \mu K v = 0$$

a $M \subset D_k$. Dále, necht' jsou splněny tyto předpoklady:

I. *Operátor A_0 splňuje požadavky definice 2.*

II. *Operátor $T = A_0^{-1}K$ je totálně spojitý v H_0 .*

Potom Galerkinova metoda pro výpočet charakteristických čísel μ rovnice (1) konverguje v H_0 . ([1], § 52.)

V úlohách o stabilitě proudění vazké tekutiny se užívá Galerkinovy metody k nalezení charakteristického čísla lineárních okrajových úloh. Vyšetřování stability proudění vazké tekutiny proudící mezi dvěma nekonečnými rotujícími válci poloměrů a, b ($b > a$) vede k úloze o charakteristických číslech rovnice

$$(2) \quad (D^2 - \alpha^2)^3 v(x) = S \alpha^2 \left(A + \frac{B}{x^2} \right) v(x), \quad a \leq x \leq b,$$

s podmínkami

$$(3) \quad v = 0, \quad (D^2 - \alpha^2) v = 0, \quad D(D^2 - \alpha^2) v = 0$$

pro $x = a, x = b$, přičemž $D = \frac{d}{dx}$; A, B, α, a, b jsou konstanty různé od nuly. ([3], (2.6) a (2.7).)

Důkaz konvergence Galerkinovy metody pro výpočet charakteristických čísel v uvedené úloze provedeme tím, že dokážeme konvergenci této metody pro rovnici

$$(4) \quad - (D^2 - \sigma)^3 v(x) + \mu p(x) v(x) = 0$$

s podmínkami

$$(5) \quad \left. \begin{array}{l} (5_1) \\ (5_2) \end{array} \right\} \begin{array}{l} v(a) = v(b) = 0, \\ (D^2 - \sigma) v(a) = (D^2 - \sigma) v(b) = 0, \\ D(D^2 - \sigma) v(a) = D(D^2 - \sigma) v(b) = 0, \end{array}$$

kde $D = \frac{d}{dx}$, $x \in \langle a, b \rangle$, funkce $p(x) \in L_2(a, b)$ a číslo $\sigma > 0$. K tomu stačí dokázat, že platí předpoklady I. a II. věty 3 pro rovnici (4) s podmínkami (5).

Platnost předpokladu I.

Nechť M je množina všech funkcí majících spojitě derivace do řádu šestého včetně v $\langle a, b \rangle$ a vyhovujících okrajovým podmínkám (5). Budiž N množina všech funkcí majících spojitě derivace až do řádu šestého v $\langle a, b \rangle$ a vyhovujících okrajovým podmínkám (5₁) a (5₂). Podle věty 1 M a N jsou husté v $L_2(a, b)$.

Položme

$$\varphi = -Lv, \quad \text{kde} \quad L = D^2 - \sigma, \quad A_0 v = -L^3 v, \quad K v = p v.$$

Podmínka (5₂) má potom tvar

$$(6) \quad \varphi(a) = \varphi(b) = 0,$$

přičemž pro $v(x)$ platí (5₁). Dokážeme nejdříve, že operátor A_0 je kladně definitní na N .

Především

$$(7) \quad v = -L^{-1}\varphi = -\int_a^b G(x, \xi) \varphi(\xi) d\xi,$$

kde $G(x, \xi)$ je Greenova funkce pro úlohu danou rovnicí

$$Lv = 0$$

a okrajovými podmínkami (5₁). Operátor L^{-1} je tedy omezený a integrál (7) je Fredholmův operátor se symetrickým jádrem aplikovaný na funkci $\varphi(\xi) \in L_2(a, b)$. Je tedy samodružný (viz [4], § 30). Integroací per partes a podle (6) je

$$\begin{aligned} (A_0 v, v) &= -(L^2 v, v) = -(L^2 \varphi, L^{-1} \varphi) = -(L \varphi, \varphi) = \\ &= -\int_a^b (\varphi'' \varphi - \sigma \varphi^2) dx \geq \sigma \|\varphi\|^2. \end{aligned}$$

Podle (5₁)

$$\|\varphi\|^2 = (Lv, Lv) = \int_a^b (v''^2 + 2\sigma v'^2 + \sigma^2 v^2) dx \geq \sigma^2 \int_a^b v^2 dx = \sigma^2 \|v\|^2.$$

Odtud a z předchozí nerovnosti dostaneme

$$(8) \quad (A_0 v, v) \geq \gamma^2 \|v\|^2, \quad \gamma = \sigma \sqrt{\sigma} > 0.$$

Operátor A_0 je tedy kladně definitní na N . Protože však $M \subset N$, je A_0 též kladně definitní na M , lze jej tedy podle věty 2 rozšířit na samodružný operátor.

Platnost předpokladu II.

Skalární součin

$$[u, v] = (A_0 u, v)$$

definuje na uzávěru M prostor H_0 s normou

$$\|v\|^2 = (A_0 v, v) = -\int_a^b (D^2 - \sigma)^3 v \cdot v dx.$$

Dokážeme, že operátor $Tv = A_0^{-1}pv$ je totálně spojitý v H_0 .

Především je

$$Tv = \int_a^b G_1(x, \xi) p(\xi) v(\xi) d\xi,$$

kde $G_1(x, \xi)$ je Greenova funkce pro úlohu danou rovnicí

$$(D^2 - \sigma)^3 v(x) = 0, \quad a \leq x \leq b$$

a okrajovými podmínkami (5).

Označme znakem J dvojrozměrný interval $J = \langle a, b \rangle \times \langle a, b \rangle$ a znakem $C\langle a, b \rangle$ množinu všech konečných spojitých reálných funkcí v $\langle a, b \rangle$. Nechť Q je omezená množina funkcí $v(x)$ v $L_2(a, b)$. Existuje tedy číslo $C_1 > 0$ tak, že $\|v\| < C_1$, když $v \in Q$. Nechť U je množina funkcí $u = Tv$, kde $v \in Q$. Předně $U \subset C\langle a, b \rangle$.

Dále

$$|u|^2 \leq \int_a^b |v|^2 d\xi \cdot \int_a^b |G_1(x, \xi) p(\xi)|^2 d\xi < C_1^2 M_1^2 X^2,$$

kde

$$M_1 = \max_{[x, \xi] \in J} |G_1(x, \xi)|, \quad \int_a^b |p(\xi)|^2 d\xi < X^2.$$

Funkce z U jsou tedy stejně omezené. Dokážeme, že jsou též stejně spojitě.

Funkce $G_1(x, \xi)$ je stejnoměrně spojitá v J . K libovolnému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta(\varepsilon) > 0$ tak, že

$$(x_1 \in \langle a, b \rangle, x_2 \in \langle a, b \rangle, |x_1 - x_2| < \delta(\varepsilon)) \Rightarrow |G_1(x_1, \xi) - G_1(x_2, \xi)| < \varepsilon.$$

Potom po každé $u \in U$ platí

$$(x_1 \in \langle a, b \rangle, x_2 \in \langle a, b \rangle, |x_1 - x_2| < \delta(\varepsilon)) \Rightarrow |u(x_1) - u(x_2)|^2 < \varepsilon^2 C_1^2 X^2.$$

Podle Arzelovy věty množina U je normální. (JARNÍK, Diferenciální počet, kap. VI, § 17.) Operátor T je tedy totálně spojitý ve smyslu stejnoměrné konvergence a tedy tím spíše je totálně spojitý ve smyslu konvergence v průměru v $L_2(a, b)$.

Budiž F omezená množina funkcí $v(x)$ v H_0 . Existuje tedy číslo $B_0 > 0$ tak, že

$$|v| < B_0, \quad \text{když } v \in F.$$

Podle (8)

$$\|v\| < \frac{1}{\sigma\sqrt{\sigma}} |v|$$

a tudíž

$$(9) \quad \|v\| < \frac{1}{\sigma\sqrt{\sigma}} B_0, \quad \text{když } v \in F.$$

Operátor T je totálně spojitý v $L_2(a, b)$, lze tedy vybrat posloupnost $v_n(x) \in F$ tak, že

$$(10) \quad \|Tv_n - Tv_m\| \xrightarrow{n, m \rightarrow \infty} 0.$$

Odhadneme

$$|Tv_n - Tv_m|.$$

Podle definice normy v H_0

$$\begin{aligned} |Tv_n - Tv_m|^2 &= (A_0 T(v_n - v_m), T(v_n - v_m)) = \\ &= (p(v_n - v_m), T(v_n - v_m)). \end{aligned}$$

Odtud a podle (9) a (10)

$$\begin{aligned} |Tv_n - Tv_m|^2 &\leq \|p\| \cdot \|v_n - v_m\| \cdot \|Tv_n - Tv_m\| \leq \\ &\leq \frac{2B_0}{\sigma\sqrt{\sigma}} \|p\| \cdot \|Tv_n - Tv_m\| \xrightarrow{n, m \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

Operátor T je tedy totálně spojitý v H_0 , čímž je dokázáno, že podmínka II. věty 3 je splněna. Tedy Galerkinova metoda pro výpočet charakteristických čísel rovnice (4) s podmínkami (5) konverguje v H_0 .

Literatura

- [1] *C. Г. Михлин*: Прямые методы в математической физике.
- [2] *C. Г. Михлин*: Проблема минимума квадратичного функционала.
- [3] *R. C. di Prima*: Application of Galerkin Method to Hydrodynamic Stability. Quarterly of Applied Mathematics, 1955, 13.
- [4] *Люстерник, Соболев*: Элементы функционального анализа.

Резюме

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ГАЛЕРКИНА В ЗАДАЧАХ ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ТЕЧЕНИЙ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

ИОСЕФ КОЛОМЫ (Josef Kolomý)

В этой статье доказывается сходимость метода Галеркина в применении к задаче отыскания собственных значений в задачах об устойчивости течений вязкой жидкости между двумя бесконечными цилиндрами радиусов a, b ($b > a$), вращающимся в одном и том же и в противоположных направлениях.

Summary

AN APPLICATION OF GALERKIN'S METHOD TO STABILITY PROBLEMS OF A STREAM LINE VISCOUS FLOW

JOSEF KOLOMÝ

This paper contains a proof of convergence of Galerkin's method for the calculation of eigenvalues in stability problems of a stream line viscous flow between two coaxial infinite cylinders rotating in the same or opposite directions.