Aplikace matematiky

Jindřich Nečas

Über Grenzwerte von Funktionen, welche ein endliches Dirichletsches Integral haben

Aplikace matematiky, Vol. 5 (1960), No. 3, 202--209

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/102706`

ÜBER GRENZWERTE VON FUNKTIONEN, WELCHE EIN ENDLICHES DIRICHLET'SCHES INTEGRAL HABEN

JINDŘICH NEČAS

(Eingegangen am 31. März 1959.)

In dieser Arbeit werden die Bedingungen für eine Funktion, welche am Rande eines Gebietes definiert ist, angegeben, die ihre Fortsetzung auf das ganze Gebiet erlauben; diese Fortsetzung hat ein endliches Dirichlet'sches Integral.

1. EINLEITUNG

Die Theorie der Grenzwerte von Funktionen, die ein endliches Dirichlet'sche-Integral[1]) haben, ist zur Zeit mehr oder weniger abgeschlossen. Die wichtigs sten Arbeiten aus diesem Gebiet sind die Arbeiten von S. M. NIKOLSKIJ, T. I. AMANOV, E. GAGLIARDO, G. PRODI, L. N. SLOBODĚCKIJ u. V. M. BABIČ, L. de VITA, G. FREUD u. D. KRÁLIK. Die Möglichkeit der Fortsetzung einer Funktion, die am Rande des Gebietes definiert ist, auf eine Funktion mit beschränktem Dirichlet'schen Integral, hat in der Variationsrechnung entscheidende Bedeutung. Wenn wir nämlich die Lösung einer elliptischen Gleichung zweiten Grades $Du = 0$ bei vorgeschriebener Bedingung $u = f$ am Rande suchen, dann kann z. Bsp. die Variationsmethode der orthogonalen Projektion theoretisch und die Methode von Ritz numerisch nur dann angewendet werden, wenn f auf das ganze Gebiet so fortsetzbar ist, dass sie ein beschränktes Dirichlet'sches Integral hat.

2. ABLEITUNG DER BEDINGUNGEN FÜR DIE RANDFUNKTION

Wir werden nur ebene einfach zusammenhängende Gebiete Ω untersuchen, deren Rand eine stetige rektifizierbare Kurve von der Länge 2π ist. Wir werden weiter voraussetzen, dass einfach zusammenhängende Gebiete Ω_1

[1]) In der französischen und italienischen Literatur wird jetzt für diese Randwerte der Begriff „Spur" eingeführt.

und Ω_2 existieren, wobei $\overline{\Omega}_1 \subset \Omega \subset \overline{\Omega} \subset \Omega_2$ ist und die Abbildung Z so, dass Z das geschlossene Gebiet $\overline{\Omega}_2 - \Omega_1$ auf den Kreisring $\overline{\Lambda}$, $\frac{1}{2} \leqq r \leqq 2$ abbildet. Wir fordern, dass die Abbildung Z stetig auf $\overline{\Omega}_2 - \Omega_1$ ist und eine stetige Inversion Z^{-1} erfüllt. Wenn wir mit dem Symbol $[x, y]$ die Punkte aus $\overline{\Omega}_2$ und mit $[x', y']$ Punkte aus $\overline{\Lambda}$ bezeichnen, so setzen wir voraus, dass die Funktionen $x' = f_x(x, y)$, $y' = f_y(x, y)$, welche die Abbildung Z vorstellen, und die Funktionen $f_x^{-1}(x', y') = x$, $y = f_x^{-1}(x', y')$, welche die Abbildung Z^{-1} representieren, teilweise stetige erste partielle Ableitungen haben. Wir setzen weiter voraus, dass das Bild des geschlossenen Gebietes $\overline{\Omega}_2 - \Omega$ der Kreisring $\overline{K}_2 - K$ ist und das Bild des geschlossenen Gebietes $\dot{\Omega} - \Omega_1$ der Kreisring $\overline{K} - K_1$ ist, wobei K der Kreis mit dem Halbmesser 1 und K_1 der Zentrikreis mit K und dem Halbmesser $\frac{1}{2}$ ist und K_2 der Zentrikreis mit K mit dem Halbmesser 2. Den Punkten am Rande $\dot{\Omega}$ entsprechen die Punkte auf dem Kreis $r = 1$ so, dass die ihnen entsprechenden Bögen gleich sind.

Wir führen nun eine kleine „geometrische" Überlegung durch und beweisen folgenden Satz:

Satz 1. *Es sei ein Gebiet Ω gegeben, dessen Rand durch eine einzige sich nicht schneidende Kurve mit stetiger Tangente bis auf endlich viele Winkelpunkte (Wendepunkte werden ausgeschlossen) gebildet ist. Dann gehört Ω unserer Klasse an.*

Beweis. Es seien $0 < s_1 < s_2 < \ldots < s_n < 2\pi$ die Bögen der entsprechenden Winkelpunkte. Wir untersuchen z. Bsp. das Intervall $\langle s_1, s_2 \rangle$ genauer. Wir teilen es in m gleiche Bogenteile durch die Punkte $\sigma_0 = s_1, \sigma_1, \ldots, \sigma_m = s_2$ und jedes der Intervalle $\langle \sigma_1, \sigma_{i+1} \rangle$, $i = 0, \ldots, m - 1$ auf drei gleiche Teile durch die Bögen σ_{i1}, σ_{i2}. Durch die Punkte des Intervalles[2]) $\langle \sigma_0, \sigma_{0,1} \rangle$ führen wir Parallele mit der Winkelachse σ_0 und durch die Punkte des Intervalls $\langle \sigma_{02}, \sigma_{11} \rangle$ führen wir Parallele mit der Normalen im Punkte σ_1, durch die Punkte des Intervalls $\langle \sigma_{12}, \sigma_{21} \rangle$ führen wir Parallele mit der Normalen im Punkte σ_2 usw. bis zu den Punkten des Intervalls $\langle \sigma_{m-1,2}, \sigma_m \rangle$ durch welche wir Parallele mit der Winkelachse σ_m führen. Nun sei P_0 der Schnittpunkt der Geraden, welche durch die Punkte σ_{01} und σ_{02} geht und P_1 der Schnittpunkt der Geraden die durch die Punkte σ_{11}, σ_{12} geht usw. Nun führen wir Gerade vom Punkt P_0 durch die Punkte des Intervalls $\langle \sigma_{01}, \sigma_{02} \rangle$ usw. von P_1 durch die Punkte des Intervalls $\langle \sigma_{11}, \sigma_{12} \rangle$ usw. Wenn einer der Schnittpunkte im Unendlichen liegt, sagen wir P_k, so führen wir durch die Punkte des Intervalls $\langle \sigma_{k1}, \sigma_{k2} \rangle$ Parallele mit der Normalen im Punkte σ_k (resp. mit der Winkelachse wenn $\sigma_k = \sigma_0$ ist). Das derart gebildetete Geradensystem orientieren wir von innen nach aussen des Gebietes Ω und die Punkte am Rande bezeichnen wir mit den Koordinaten $t = \varepsilon$. Wenn ε genügend klein ist und m genügend

[2]) Der Einfachheit halber bezeichnen wir manchmal den Punkt wie den ihm entsprechenden Bogen.

gross und wir die Konstruktion der Geraden auf dem ganzen Rand durchführen, wird die Punktmenge mit den krummlinigen Koordinaten $[s, \varepsilon/2]$ den Rand des Gebietes Ω_1 bilden und die Punktmenge mit den krummlinigen Koordinaten $[s, 2\varepsilon]$ den Rand des Gebietes Ω_2. Die Abbildung Z, welche durch die Beziehungen $s = \Theta$, $r = \dfrac{t}{\varepsilon}$ definiert wird, erfüllt nun alle Forderungen der Abbildung Z.

Die notwendige Bedingung für die Fortsetzung der Funktion f auf Ω, welche am Rande $\dot{\Omega}$ definiert ist und dort ein beschränktes Dirichlet'sches Integral hat, ist, dass sie am Rande quadratisch integrierbar ist, wie aus den Sätzen von S. L. Sobolev folgt. Wir setzen also a priori voraus, dass $f \in L_2(\dot{\Omega})$ ist.

Wir wollen jetzt noch genauer erklären, was wir unter dem Symbol eines endlichen Dirichlet'schen Integrals verstehen.

Wir sagen, dass die Funktion f die auf Ω definiert ist ein endliches Dirichlet'sches Integral hat, wenn die ersten Ableitungen[3]) der Funktion f auf Ω quadratisch integrierbar sind. Symbolisch geschrieben $f \in W_2^{(1)}(\Omega)$. Unter dem Dirichlet'schen Integral verstehen wir den Ausdruck $\displaystyle\int_\Omega \left[\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2\right] d\Omega$.

Mit dem Symbol $W(\dot{\Omega})$ bezeichnen wir den Raum der Funktionen aus $L_2(\dot{\Omega})$, welche auf Funktionen aus $W_2^{(1)}(\Omega)$ fortsetzbar sind.

Grundlegende Bedeutung haben folgende Sätze:

Satz 2. *f liegt in $W(\dot{\Omega})$ dann und nur dann, wenn sie im $W(\dot{K})$ liegt.*

Wir beweisen einen Teil unserer Behauptung. (Der Zweite lässt sich ganz genauso beweisen.)

Es sei $f \in W(\dot{\Omega})$. Dann existiert ihre Fortsetzung, welche wir auch mit f bezeichnen, und $f \in W_2^{(1)}(\Omega)$, daher ist um so eher $f \in W_2^{(1)}(\Omega - \bar{\Omega}_1)$. Es sei $g(x', y') = f(f_x^{-1}(x', y'), f_y^{-1}(x', y'))$. Mit Rücksicht auf die Beschränktheit der ersten Ableitungen der Funktionen f_x^{-1}, f_y^{-1} erhalten wir $g \in W_2^{(1)}(K - \bar{K}_1)$. Es existiert nun eine Funktion φ mit stetigen ersten Ableitungen, welche in der ganzen Ebene definiert ist und gleich Eins in der Umgebung des Randes $\dot{K}$ ist und gleich Null in der Umgebung des geschlossenen Kreises $\bar{K}_1$. Wenn wir nun die Definition der Funktion $g\varphi$ so ergänzen, dass sie auf $\bar{K}_1$ gleich Null ist, so liegt sie in $W_2^{(1)}(K)$ und ihr Grenzwert ist offensichtlich f.

Satz 3. *f liegt in $W(\dot{K})$ dann und nur dann, wenn sie in $W(\dot{K}_c)$ liegt. (Hier bedeutet K_c das Äussere des Einheitskreises.)*

[3]) Die ersten Ableitungen verstehen wir im Sinne von S. L. Sobolev. In unseren Erwägungen haben die untersuchten Funktionen die ersten Ableitungen im gewöhnlichen Sinn teilweise stetig, die gleich den Ableitungen im Sinne von S. L. Sobolev sind.

Der Beweis dieses Satzes erhalten wir direkt durch Anwendung der inversen Abbildung.

Eine Folgerung des Satzes 3 ist folgender Satz:

Satz 4. *f liegt in $W(\dot{\Omega})$ dann und nur dann, wenn sie in $W(\dot{\Omega}_c)$ liegt. (Hier bedeutet Ω_c das Komplement von $\overline{\Omega}$.)*

Aus Satz 2 folgt, dass wir uns auf den Einheitskreis beschränken können.

Nun gilt:

Satz 5. *Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass $f \in W(\dot{K})$ ist, ist dass $\sum_{k=1}^{\infty} k(a_k^2 + b_k^2) < \infty$ gilt, wobei*

$$(1) \qquad a_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(s) \cos ks \, ds\,, \quad b_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(s) \sin ks \, ds \quad \textit{ist.}$$

Der Beweis dieses Satzes ist sehr einfach. Er ist z. Bsp. von R. Courant in seiner Monografie [2] zu finden.

Satz 6. *Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass $f \in W(\dot{K})$ ist, ist dass*

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \left[\frac{f(\varphi + t) - f(\varphi - t)}{t}\right]^2 dt \, d\varphi < \infty$$

gilt.

Der Beweis dieses Satzes ist in dem Artikel von G. Freud und D. Králik [3] gegeben.

Satz 7. *Es sei $f \in W(\dot{K})$. Dann ist $\int_0^{2\pi} [f(s + h) - f(s)]^2 \, ds \leqq M|h|$, wobei M eine Konstante ist.*

Der Beweis dieses Satzes ist z. Bsp. in dem Artikel von S. M. Nikolskij [4] zu finden.

Satz 8. *Es existiere eine Konstante M derart, dass $\int_0^{2\pi} [f(s + h) - f(s)]^2 \, ds \leqq$ $\leqq M|h|^{1+\varepsilon}$ ist wo $\varepsilon > 0$ ist. Dann ist $f \in W(\dot{K})$.*

Den Beweis findet der Leser im oben genannten Artikel von S. M. Nikolskij.

Satz 9. *Es sei $f(s)$ eine Hölder'sche Funktion mit der Potenz $\frac{1}{2} + \varepsilon$ wo $\varepsilon > 0$ ist. (D. h. $|f(s + h) - f(s)| \leqq M|h|^{\frac{1}{2}+\varepsilon}$, M ist eine Konstante.) Dann ist $f \in W(\dot{K})$.*

Beweis. In der Tat ist $\int_0^{2\pi} [f(s + h) - f(s)]^2 \, ds \leqq 2\pi M^2 \, |h|^{1+2\varepsilon}$, also ist nach Satz 8 $f \in W(\dot{K})$.

Wir wollen nun absolut stetige Funktionen näher betrachten. Bekanntlich genügt die absolute Stetigkeit der Funktion f nicht dazu, dass $f \in W(\dot{K})$ ist. Ein Gegenbeispiel hat L. de VITA in seiner Arbeit [5] angegeben. Es gilt jedoch folgender einfache Satz:

Satz 10. *Es sei f eine absolut stetige Funktion und es sei*

$$\int_0^{2\pi} |f'(s)| \lg^+ |f'(s)| \, ds < \infty . \tag{2}$$

Dann ist $f \in W(\dot{K})$ $(\lg^+ |f'(s)| = \operatorname{Max}(0, \lg |f'(s)|))$.

Beweis. Aus Satz 6.36, Seite 138 der Monografie von A. ZYGMUND [6] folgt, dass die Bedingung (2) hinreichend dazu ist, dass $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| + |b_k| < \infty$ ist, wobei a_k, b_k die Koeffizienten von Fourier der Funktion f nach (1) sind. Hieraus folgt, dass die Funktion $\varphi(s) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin ks - b_k \cos ks$ auf dem Einheitskreis beschränkt ist. Nach Satz S. 154 [6] ist die Bedingung (2) und die Beschränktheit der Funktion φ hinreichend dazu, dass die Gleichung $-\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f'(s)\, \varphi(s)\, ds = \sum_{k=1}^{\infty} k(a_k^2 + b_k^2)$ gilt und da $\left| \int_0^{2\pi} f'(s)\, \varphi(s)\, ds \right| < \infty$ ist, ist Satz 10 bewiesen.

Aus Satz 10 folgt eine einfache, für die Praxis anwendbarste hinreichende Bedingung für die Zugehörigkeit der Funktion f in die Menge $W(\dot{K})$.

Satz 11. *Wenn f absolut stetig ist und wenn $\int_0^{2\pi} |f'(s)|^p \, ds < \infty$ ist, wo $p > 1$ ist, dann ist $f \in W(\dot{K})$.*

Es gilt nämlich $\displaystyle\int_0^{2\pi} |f'(s)| \lg^+ |f'(s)| \, ds \leq \frac{1}{p-1} \int_0^{2\pi} |f'(s)|^p \, ds$.

Beispiel. Es sei Ω ein gleichseitiges Dreieck von der Seitenlänge 1 auf dessen zwei Seiten $f = 0$ ist und auf der dritten ist $f(s) = s^\alpha (1 - s)^\alpha$, wo $\alpha > 0$, $0 \leq s \leq 1$ ist. Dann ist $f \in W(\dot{\Omega})$. Wirklich ist $f'(s) = \alpha[s(1 - s)]^{\alpha-1} [1 - 2s]$. Es sei $1 < p < \frac{1}{1-\alpha}$. Wir haben dann

$$\int_0^1 |f'(s)|^p \, ds \leq 3^p \alpha^p \int_0^1 \frac{1}{s^{(1-\alpha)p}} \frac{1}{(1 - s)^{(1-\alpha)p}} \, ds < \infty ,$$

denn es ist $(1 - \alpha)\, p < 1$.

3. EINIGE THEORETISCHE ERGÄNZUNGEN

Aus den Sätzen von Sobolev folgt: Wenn $f \in W(\dot{K})$ ist, dann gilt $\int\limits_0^{2\pi} |f(s)|^p \, ds < \infty$ für beliebige $p > 1$. Wir beweisen einen stärkeren Satz.

Satz 12. *Es gelte* $\int\limits_0^{2\pi} [f(s+h) - f(s)]^2 \, ds \leqq M\,|h|$, *wo* M *eine Konstante ist. Dann gilt* $\int\limits_0^{2\pi} |f(s)|^p \, ds < \infty$ *für beliebige* $p > 1$.

Beweis. Es ist

$$\int\limits_0^{2\pi} [f(s+h) - f(s)]^2 \, ds = 4\pi \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) \sin^2 \frac{kh}{2} \leqq M\,|h|\,. \tag{3}$$

(Überall im Weiteren haben a_k u. b_k dieselbe Bedeutung wie in (1).) Es sei nun q eine beliebige Zahl $1 < q < 2$. Wir wählen λ so, dass $0 < \lambda < 1$ und $\lambda \dfrac{q}{2-q} > 1$ ist. Aus (3) folgt

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^{1+\lambda}(a_k^2 + b_k^2) \frac{\sin^2 \frac{kh}{2}}{(k/h)^{1+\lambda}} \leqq \frac{M}{4\pi}\,|h|^{-\lambda}\,. \tag{4}$$

Wir integrieren die Ungleichung (4) nach h von Null bis Eins. Da

$$\int\limits_0^1 \frac{\sin^2 \frac{kh}{2}}{(kh)^{1+\lambda}} \, dh \geqq \frac{1}{2\pi^2 k}$$

ist, erhalten wir aus (4)

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^{\lambda}(a_k^2 + b_k^2) \leqq \frac{\pi}{2} M \frac{1}{1-\lambda}\,. \tag{5}$$

Wir haben weiter:

$$\sum_{k=1}^{\infty} (|a_k|^q + |b_k|^q) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[(k^\lambda a_k^2)^{\frac{2}{q}} + (k^\lambda b_k^2)^{\frac{q}{2}} \right] k^{-\lambda \frac{q}{2}} \leqq$$

$$\leqq \left[\left(\sum_{k=1}^{\infty} k^\lambda a_k^2 \right)^{\frac{q}{2}} + \left(\sum_{k=1}^{\infty} k^\lambda b_k^2 \right)^{\frac{q}{2}} \right] \left[\sum_{k=1}^{\infty} k^{-\lambda \frac{q}{2-q}} \right]^{\frac{2-q}{2}} < \infty\,.$$

Die Konvergenz der Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (|a_k|^q + |b_k|^q)$ hat die Zugehörigkeit der Funktion f in $L_p(\dot{\Omega})$ zur Folge, wo $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ ist. Hiermit ist dieser Satz bewiesen.

Wir beweisen nun noch folgenden Satz:

Satz 13. *Es sei f absolut stetig und* $\int\limits_0^{2\pi} |f'(s)|^p \, \mathrm{d}s < \infty$, *wobei* $1 < p < 2$ *ist. Dann ist* $\int\limits_0^{2\pi} [f(s+h) - f(s)]^2 \, \mathrm{d}s \leqq M \, |h|^{\frac{3p-2}{p}}$, *wo M eine Konstante ist und* $\frac{3p-2}{p} > 1$.

Beweis. Es sei $\gamma_n = \sum\limits_{k=n}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2)$. Es gilt

$$\gamma_n \leqq \left[\left(\sum_{k=n}^{\infty} (k\,|a_k|)^q\right)^{\frac{2}{q}} + \left(\sum_{k=n}^{\infty} (k\,|b_k|)^q\right)^{\frac{2}{q}}\right] \left(\sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k^{\frac{2q}{q-2}}}\right)^{\frac{q-2}{q}}. \tag{6}$$

Hier ist $\frac{1}{q} + \frac{1}{p} = 1$. Weil die Beschränktheit des Integrals $\int\limits_0^{2\pi} |f'(s)|^p \, \mathrm{d}s$ die Konvergenz der Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} [(k\,|a_k|)^q + (k\,|b_k|)^q]$ zur Folge hat, folgt aus (6), dass $\gamma_n \leqq \frac{N}{n^{\frac{q+2}{q}}}$ ist, wo N eine Konstante ist. Nun gilt

$$\int_0^{2\pi} [f(s+h) - f(s)]^2 \, \mathrm{d}s \leqq \pi h^2 \sum_{k=1}^{\left[\frac{1}{|h|}\right]} (a_k^2 + b_k^2)\, k^2 + 4\pi \sum_{k=1+\left[\frac{1}{|h|}\right]}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2). \tag{7}$$

Wir haben weiter $\pi h^2 \sum\limits_{k=1}^{\left[\frac{1}{|h|}\right]} (\gamma_k - \gamma_{k+1})\, k^2 \leqq 2\pi h^2 \sum\limits_{k=1}^{\left[\frac{1}{|h|}\right]} \gamma_k k \leqq P\,|h|^{\frac{q+2}{q}}$, wo P eine Konstante ist. Anderseits ist $\gamma_{1+\left[\frac{1}{|h|}\right]} \leqq N\,|h|^{\frac{q+2}{q}}$, also folgt aus (7), dass $\int\limits_0^{2\pi} [f(s+h) - f(s)]^2 \, \mathrm{d}s \leqq M\,|h|^{\frac{q+2}{q}}$ ist, wo M eine Konstante ist. Es ist jedoch $\frac{q+2}{q} = \frac{3p-2}{p} > 1$. Hiermit ist der Beweis gegeben.

Literatura

[1] *С. Л. Соболев:* Некоторые применения функционального анализа в математической физике. Ленинград 1950.

[2] *R. Courant:* Dirichlet's principle, conformal mapping and minimal surfaces. New York 1950.

[3] *G. Freud, D. Králik:* Über die Anwendbarkeit des Dirichletschen Prinzips für den Kreis. Acta mathematica, VII, sv. 3—4, 1956, 411—418.

[4] *С. М. Никольский:* К задаче Дирихле для круга и полупространства. Математический сборник, том 35, 1954, 247—265.

[5] *L. de Vita:* Sulle funzioni ad integrale di Dirichlet finito. Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Serie III, Vol. XII, 1958, 55—127.

[6] *A. Zygmund:* Trigonometrical series. Warszawa — Lwow 1935.

Souhrn

O HRANIČNÍCH HODNOTÁCH FUNKCÍ, MAJÍCÍCH KONEČNÝ DIRICHLETŮV INTEGRÁL

JINDŘICH NEČAS

V práci jsou studovány podmínky k tomu, aby funkce f, definovaná na hranici rovinné oblasti, byla stopou funkce s omezeným Dirichletovým integrálem.

Резюме

О ГРАНИЧНЫХ ЗНАЧЕНИЯХ ФУНКЦИЙ, ИМЕЮЩИХ КОНЕЧНЫЙ ИНТЕГРАЛ ДИРИХЛЕ

ИНДРЖИХ НЕЧАС (Jindřich Nečas)

Пусть Ω — просто связная плоская область, граница которой представляет собой простую замкнутую кривую длины 2π. Предполагается, что кривая имеет непрерывную касательную за исключением конечного числа угловых точек.

В работе показано, что необходимое и достаточное условие для того, чтобы функция f, определенная на границе области Ω, была следом функции с ограниченным интегралом Дирихле, такое же, как в том случае, когда Ω является единичным кругом.

Затем показано, что в случае абсолютной непрерывности функции f условие $\int\limits_0^{2\pi} |f'(s)|[\max(0, \lg|f'(s)|)] \, ds < \infty$ является достаточным для приведенного выше свойства.

В заключение обобщается один частный случай теоремы Соболева о погружении.