

# Aplikace matematiky

---

Ludvík Prouza

O spektru „vzorkovaného“ stacionárního náhodného procesu

*Aplikace matematiky*, Vol. 5 (1960), No. 5, 394--397

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/102725>

## Terms of use:

© Institute of Mathematics AS CR, 1960

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

O SPEKTRU „VZORKOVANÉHO“ STACIONÁRNÍHO  
NÁHODNÉHO PROCESU

LUDVÍK PROUZA

(Došlo dne 10. září 1959.)

V článku se vyšetřuje souvislost spektra stacionárního náhodného procesu a příslušné „vzorkované“ („vybrané“) náhodné posloupnosti.

1. ÚVOD

Nechť  $t$  je reálné. Necheť  $\xi(t)$  je komplexní náhodný proces stacionární v širším smyslu s korelační funkcí  $R(t)$  a spektrální funkcí  $F(\lambda)$ , definovanou známou CHINČINOVOU formulí

$$(1) \quad R(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda} dF(\lambda)$$

a normovanou vztahy

- 1)  $F(\lambda)$  je spojitá zprava,
- 2)  $F(-\infty) = 0$ .

Nechť  $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ . Necheť  $\{\xi(n)\}$  je posloupnost „vzorkovaná“ („vybraná“) z procesu  $\xi(t)$ . Jak známo, tato náhodná posloupnost je stacionární v širším smyslu a má korelační posloupnost  $\{R(n)\}$  a spektrální funkci  $V(\lambda)$ , definovanou pro  $\lambda \in \langle -\pi, \pi \rangle$  známou WOLDOVOU formulí

$$(2) \quad R(n) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{in\lambda} dV(\lambda)$$

a normovanou vztahy

- 1\*)  $V(\lambda)$  je spojitá zprava,
- 2\*)  $V(-\pi) = 0$ .

V dalším se budeme zabývat relací mezi  $F(\lambda)$  a  $V(\lambda)$ .

2. VZTAH MEZI  $F(\lambda)$  a  $V(\lambda)$

**Věta. A.** *Nechť  $k = 0, 1, 2, \dots$ . Nechť  $\lambda \in \langle -\pi, \pi \rangle$ . Nechť je dána posloupnost funkcí  $\{V_k(\lambda)\}$ , kde*

$$(3) \quad V_k(\lambda) = \sum_{m=-k}^k \{F[\lambda + 2m\pi] - F[(2m-1)\pi]\}.$$

Potom

$$(4) \quad V(\lambda) = \lim_{k \rightarrow \infty} V_k(\lambda),$$

přičemž konvergence je stejnoměrná pro  $\lambda \in \langle -\pi, \pi \rangle$ .

**B.** *Nechť proces  $\xi(t)$  je reálný. Pak platí též*

$$(5) \quad V(\lambda) = F(\lambda) + \sum_{m=1}^{\infty} \{F[2m\pi + \lambda] - F[2m\pi - \lambda - 0]\} - \\ - \sum_{m=0}^{\infty} \{F[(2m+1)\pi] - F[(2m+1)\pi - 0]\}.$$

**C.** *Nechť existuje spektrální hustota  $f(\lambda) = F'(\lambda)$ . Pak existuje spektrální hustota  $v(\lambda) = V'(\lambda)$  a platí*

$$(6) \quad v(\lambda) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} f(\lambda + 2m\pi).$$

Důkaz: A. Následující vlastnosti  $\{V_k(\lambda)\}$  jsou skoro samozřejmé:

- a)  $V_k(-\pi) = 0$  pro každé  $k$ ,
- b)  $V_k(\lambda)$  je neklesající v  $\lambda$  pro každé  $k$ ,
- c)  $V_k(\lambda)$  je zprava spojitá v  $\lambda$  pro každé  $k$ ,
- d)  $V_k(\lambda) \leq F(\infty)$  pro každé  $k$ ,
- e)  $V_k(\lambda) \leq V_{k+1}(\lambda)$  pro každé  $k$  a  $\lambda$ ,
- f)  $\lim_{k \rightarrow \infty} V_k(\pi) = F(\infty)$ .

Z d), e) plyne ihned existence funkce  $V^*(\lambda) = \lim_{k \rightarrow \infty} V_k(\lambda)$  pro každé  $\lambda \in \langle -\pi, \pi \rangle$ .

Z b) je patrné, že  $V^*(\lambda)$  je neklesající v  $\lambda$ . Protože pro  $l > k$  a každé  $\lambda \in \langle -\pi, \pi \rangle$  platí

$$(7) \quad V_l(\lambda) - V_k(\lambda) \leq F(\infty) - F[(2k-1)\pi] + F[-(2k+1)\pi],$$

je zřejmé, že konvergence  $\{V_k(\lambda)\}$  k  $V^*(\lambda)$  je stejnoměrná pro  $\lambda \in \langle -\pi, \pi \rangle$ .

Z c) je patrné, že  $V^*(\lambda)$  je spojitá zprava, z a) plyne, že  $V^*(-\pi) = 0$ .

Dále platí

$$(8) \quad \int_{-\pi}^{\pi} e^{in\lambda} dV_k(\lambda) = \int_{-(2k+1)\pi}^{(2k+1)\pi} e^{in\lambda} dF(\lambda),$$

tedy z (1)

$$(9) \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} e^{in\lambda} dV_k(\lambda) = R(n).$$

Avšak ze shora uvedených vlastností  $V^*(\lambda)$  je zřejmé, že na posloupnost  $\{V_k(\lambda)\}$  a  $V^*(\lambda)$  lze použít HELLJOVY věty (viz [2], s. 206), proto

$$(10) \quad \int_{-\pi}^{\pi} e^{i n \lambda} dV^*(\lambda) = R(n)$$

s týmiž normovacími vztahy na  $V^*(\lambda)$  jako v 1\*) a 2\*). Tedy

$$V^*(\lambda) = V(\lambda).$$

B. Pro reálný proces  $\xi(t)$  platí, jak známo,

$$(11) \quad F(\lambda - 2k\pi) = F(\infty) - F(2k\pi - \lambda - 0).$$

S použitím tohoto vztahu plyne snadno (5) z (3).

Vzorec (5) uvádí s jiným normováním WOLD ve své základní práci [1] (viz [1], s. 70).

C. Z (3) máme pro  $A \in \langle -\pi, \pi \rangle$

$$(12) \quad V_k(A) = \int_{-\pi}^A dV_k(\lambda) = \int_{-\pi}^A \sum_{m=-k}^k f(\lambda + 2m\pi) d\lambda.$$

Definujme

$$(13) \quad v_k(\lambda) = \sum_{m=-k}^k f(\lambda + 2m\pi).$$

Potom zřejmě

$$(14) \quad 0 \leq v_k(\lambda) \leq v_{k+1}(\lambda)$$

pro každé  $k, \lambda$ . S připuštěním hodnoty  $\infty$  existuje tedy funkce  $v^*(\lambda) = \lim_{k \rightarrow \infty} v_k(\lambda)$ . Ježto pro každé  $k$  a  $A \in \langle -\pi, \pi \rangle$  platí

$$(15) \quad \int_{-\pi}^A v_k(\lambda) d\lambda \leq F(\infty),$$

existuje  $\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^A v_k(\lambda) d\lambda$ . Tedy z jedné známé věty (viz [3], s. 387—388) plyne, že  $v^*(\lambda)$  je v  $\langle -\pi, \pi \rangle$  skoro všude konečná a integrovatelná a

$$(16) \quad V(A) = \int_{-\pi}^A v^*(\lambda) d\lambda.$$

Můžeme tedy definovat

$$(17) \quad v(\lambda) = v^*(\lambda)$$

(viz též [4], s. 57).

#### Literatura

- [1] Wold H.: A Study in the Analysis of Stationary Time Series. Almqvist & Wiksell, Uppsala 1938.  
 [2] Натансон И. П.: Теория функций вещественной переменной. ГИИТЛ, Москва 1950.

- [3] *Titchmarsh E.*: Теория функций. ГИИТЛ, Москва 1951.  
 [4] *Grenander U., Rosenblatt M.*: Statistical Analysis of Stationary Time Series. Almqvist & Wiksell, Stockholm 1956.  
 [5] *Prouza L.*: Poznámka o přenosové funkci lineárního impulsního filtru. Vydě ve sborníku „Souhrn prací o automatizaci 1959“.  
 [6] *Blackmann R. B., Tukey J. W.*: The measurement of power spectra from the point of communication engineering — Part II. The Bell System Technical Journal, vol. XXXVII, 1958, 485—570.

## Резюме

### О СПЕКТРЕ “ВЫБРАННОГО” СТАЦИОНАРНОГО СЛУЧАЙНОГО ПРОЦЕССА

ЛЮДОВИК ПРОУЗА (Ludvík Prouza)

В статье исследуется соотношение между спектром  $F(\lambda)$  стационарного случайного процесса и спектром  $V(\lambda)$  соответствующей „выбранной“ случайной последовательности. Доказывается формула

$$V(\lambda) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \{F[\lambda + 2m\pi] - F[(2m - 1)\pi]\},$$

и показывается ее связь с одной формулой Вольда и формулой для спектральных плотностей.

## Summary

### ON THE SPECTRUM OF „SAMPLED“ STATIONARY RANDOM PROCESSES

LUDVÍK PROUZA

In this article the relation between the spectrum  $F(\lambda)$  of a stationary random process and the spectrum  $V(\lambda)$  of the related „sampled“ random sequence is investigated. The formula

$$V(\lambda) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \{F[\lambda + 2m\pi] - F[(2m - 1)\pi]\}$$

is proved and its relation to a formula of Wold and the formula for spectral densities, is shown.