

Aplikace matematiky

Ludvík Prouza

Poznámka k jedné formuli o „vzorkovaných“ funkcích

Aplikace matematiky, Vol. 5 (1960), No. 6, 453--457

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/102731>

Terms of use:

© Institute of Mathematics AS CR, 1960

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

POZNÁMKA K JEDNÉ FORMULI O „VZORKOVANÝCH“ FUNKCÍCH

LUDVÍK PROUZA

(Došlo dne 17. září 1959)

V článku se vyšetřuje platnost jedné důležité formule, známé z teorie diskrétní Laplaceovy transformace a lineárních impulsních filtrů.

ÚVOD

V této poznámce se budeme zabývat jistým zobecněním důležité formule

$$(1) \quad R^*(s) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} R(s + 2\pi in),$$

kde $R(s)$ je Laplaceova transformace nějaké funkce $r(t)$ a $R^*(s)$ je diskrétní Laplaceova transformace „vzorkované“ posloupnosti $\{r(n)\}$.

Důkaz formule (1) má dlouhou historii; podrobný seznam příslušných pramenů, obsahujících též aplikace formule, najde čtenář v [6], [7].

I. NĚKOLIK PŘEDBĚŽNÝCH POZNÁMEK

Budiž t reálné (v aplikacích značí čas). Budiž $k = 0, 1, 2, \dots$. Nechť $r(t)$ je reálná funkce, splňující podmínky

1. $r(t) = 0$ pro $t < 0$,
2. $r(t)$ má Riemannův integrál v každém konečném intervalu,
3. $|r(t)| < Ae^{\alpha t}$ pro $t \geq 0$ a nějaké $A > 0, \alpha > 0$.

Nechť s je komplexní. Laplaceova transformace

$$(2) \quad R(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} r(t) dt$$

funkce $r(t)$, jak známo, existuje pro s splňující podmínku $\text{Re } s > s_0 > \alpha$. Nechť $\tau \in \langle 0, 1 \rangle$. Z 3. plyne existence zobecněné diskrétní Laplaceovy transformace

$$(3) \quad R^*(s, \tau) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-s(\tau+k)} r(\tau + k),$$

a protože

$$(4) \quad \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\operatorname{Re}s(\tau+k)} |r(\tau+k)| \leq A e^{\alpha} \sum_{k=0}^{\infty} e^{-(s_0-\alpha)k} < \infty,$$

konverguje řada v (3) absolutně a stejnoměrně pro $\tau \in \langle 0, 1 \rangle$. Vzhledem k 2. existuje Riemannův integrál $\int_0^1 R^*(s, \tau) d\tau$. Rozšíříme definici $R^*(s, \tau)$ na všechna reálná τ tak, že $R^*(s, \tau)$ bude periodická s periodou 1. Zřejmě k $R^*(s, \tau)$ můžeme vytvořit Fourierovu řadu

$$(5) \quad R^*(s, \tau) \sim \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m e^{2\pi i m \tau},$$

kde

$$(6) \quad c_m = \int_0^1 \sum_{k=0}^{\infty} e^{-(s+2\pi i m)(\tau+k)} r(\tau+k) d\tau = \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^1 e^{-(s+2\pi i m)(\tau+k)} r(\tau+k) d\tau = \\ = R(s + 2\pi i m).$$

Oprávněnost záměny integrace a sumace v (6) plyne ze stejnoměrné konvergence řady v (3).

2. DVĚ VĚTY O KONVERGENCI

Věta 2.1. *Nechť funkce $r(t)$ splňuje podmínky 1., 2., 3., necht $u > 0$ a necht pro každé t existuje*

$$(7) \quad \lim_{u \rightarrow 0} \frac{r(t+u) + r(t-u)}{2}.$$

Nechť ϱ je reálné, $0 < \varrho < 1$. Pak pro každé τ

$$(8) \quad \sum_{k=0}^{\infty} e^{-s(\tau+k)} \lim_{u \rightarrow 0} \frac{r(\tau+k+u) + r(\tau+k-u)}{2} = \lim_{\varrho \rightarrow 1} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \varrho^{|m|} R(s + 2\pi i m) e^{2\pi i m \tau}.$$

Důkaz: Existuje

$$(9) \quad \lim_{u \rightarrow 0} \frac{R^*(s, \tau+u) + R^*(s, \tau-u)}{2} = \\ = \lim_{u \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{\infty} e^{-s(\tau+k)} \frac{e^{-us} r(\tau+k+u) + e^{us} r(\tau+k-u)}{2} = \\ = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-s(\tau+k)} \lim_{u \rightarrow 0} \frac{r(\tau+k+u) + r(\tau+k-u)}{2},$$

kde přechod od prostředního výrazu k výrazu vpravo plyne ze stejnoměrné konvergence řady v (3) a existence limity v (7). Odtud plyne, že Fourierova řada v (5) má Abel-Poissonův součet (9), tj. plyne (8).

Kdybychom nepředpokládali platnost podmínky (7), plyne už z integrovatelnosti $R^*(s, \tau)$ dle Riemanna, že (8) platí skoro všude, ježto, jak známo, množina bodů nespojitosti $R^*(s, \tau)$ má Lebesgueovu míru 0. To však z hlediska aplikací má malý význam, naopak, z hlediska aplikací je důležitá otázka konvergence řady v (5) v obyčejném smyslu (tj. ve smyslu $\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{m=-N}^N$).

Věta 2,2. *Nechť $T \geq 0$. Nechť $r(t)$ splňuje 1., 2., 3. a má omezenou variaci v intervalu $\langle 0, T \rangle$, nechť existuje $r'(t)$ pro $t \geq T$. Nechť $\int_T^\infty \exp(-st) r'(t) dt$ konverguje pro nějaké reálné $s_0 > 0$ a je omezený pro $\text{Re } s > s_0$. Potom řada v (5) konverguje v obyčejném smyslu.*

Důkaz: Podle jedné Doetschovy věty (viz [2], s. 198, věta 9) platí za podmínek věty 2,2 $R(s) = O\left(\frac{1}{|s|}\right)$ pro $s \rightarrow \infty$ stejnoměrně v $\text{Re } s > s_0$. Speciálně tedy $R(s + 2\pi im) = O\left(\frac{1}{m}\right)$ pro pevně zvolené s . Dále za podmínek věty 2,2 platí věta 2,1, tj. platí (8). Na základě jedné Littlewoodovy věty (viz [3], s. 501) platí tedy tvrzení věty 2,2.

3. SPECIÁLNÍ PŘÍPAD PŘENOSOVÉ FUNKCE LINEÁRNÍHO FILTRU

Nechť je dán lineární filtr se soustředěnými parametry s přenosovou funkcí

$$(10) \quad W(s) = \frac{P(s)}{Q(s)},$$

kde $P(s)$ a $Q(s)$ jsou polynomy a stupeň $P(s)$ je aspoň o 1 nižší než stupeň $Q(s)$. Označme $w(t)$ impulsní odezvu (váhovou funkci) filtru. Potom

$$(11) \quad \frac{1}{2} w(0+) + \sum_{k=1}^{\infty} e^{-sk} w(k) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} W(s + 2\pi im).$$

Důkaz: Jak známo, $w(t)$ má jediný konečný skok v bodě $t = 0$, je-li stupeň $P(s)$ právě o 1 nižší než stupeň $Q(s)$, jinak je spojitá, splňuje 1., 2., 3., má derivaci a platí pro ni věta 2,2, jak plyne např. z [2], s. 138. Pro $\tau = 0$ dostáváme tedy z (3), (5), (6) ihned (11) ($s r(t) = w(t)$, $R(s) = W(s)$).

Je-li $w(0+) = 0$, dostáváme z (11) formuli (1).

ZÁVĚR

V článku jsme ukázali zobecnění formule (1) (vzorec (8)); dále jsme ukázali, že pro funkce $r(t)$, vyskytující se v aplikacích, řada (5) konverguje v obyčejném smyslu; speciálně pro přenosové funkce lineárních filtrů (10) platí

(11) v obyčejném smyslu. Je-li $w(0+) \neq 0$, je $W(s + 2\pi im)$ právě řádu $O\left(\frac{1}{m}\right)$, jak plyne např. z [4], s. 458—461 (nebo přímo z (10)). Řada vpravo v (11) konverguje v tomto případě pomalu, takže např. grafické konstrukce na ní založené, popsané v literatuře (např. [5]), jsou patrně málo přesné.

Literatura

- [1] *Doetsch G.*: Der Zusammenhang zwischen der Laplace-Transformierten einer Funktion und der zugeordneten Treppenfunktion. Regelungstechnik, März 1957, s. 86—88.
- [2] *Doetsch G.*: Theorie and Anwendung der Laplace-Transformation. Springer, Berlin 1937.
- [3] *Knopp K.*: Theory and Application of Infinite Series. Blackie & Son, London 1957.
- [4] *Смирнов В. И.*: Курс высшей математики. Том II, ГИТТЛ, Москва 1956.
- [5] *Linville W. K.*: Sampled Data Control Systems Studied through Comparison of Sampling with Amplitude Modulation. Trans. AIEE, 1951, Pt II, s. 1779—1788.
- [6] *Prouza L.*: Bemerkungen zur Theorie und Literatur über die linearen Impuls-Regel-systeme. Regelungstechnik, Mai 1960, s. 162—167.
- [7] *Prouza L.*: Poznámka o přenosové funkci lineárního impulsního filtru. Má vyjít v Souhrnu prací o automatizaci 1959.

Резюме

ПРИМЕЧАНИЕ К ОДНОЙ ФОРМУЛЕ О „ВЫБРАННЫХ“ ФУНКЦИЯХ

ЛЮДОВИК ПРОУЗА (Ludvík Prouza)

В статье исследуется некоторое обобщение важной формулы

$$(1) \quad R^*(s) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} R(s + 2\pi in),$$

где $R(s)$ означает преобразование Лапласа некоторой функции $r(t)$, а $R^*(s)$ — дискретное преобразование Лапласа „выбранной“ последовательности $\{r(n)\}$.

Подробный список литературы к истории доказательства формулы (1) и различным применениям найдется в [6], [7].

Summary

NOTE ON A FORMULA ON "SAMPLED" FUNCTIONS

LUDVÍK PROUZA

In this paper a generalization of the important formula

$$(1) \quad R^*(s) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} R(s + 2\pi in)$$

is investigated, where $R(s)$ is the Laplace transform of a function $r(t)$ and $R^*(s)$ is the discrete Laplace transform of the "sampled" sequence $\{r(n)\}$.

A fairly complete bibliography concerning the history of proof of this formula and its various applications can be found in [6], [7].