

# Aplikace matematiky

---

Evžen Jokl

K odhadu nepřesnosti výpočtů na nomogramech

*Aplikace matematiky*, Vol. 6 (1961), No. 1, 68--72

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/102739>

## Terms of use:

© Institute of Mathematics AS CR, 1961

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

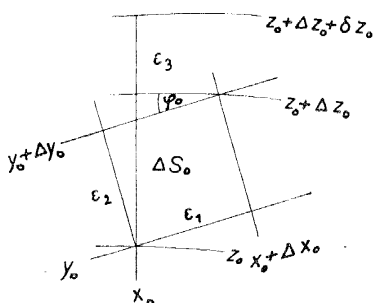
K ODHADU NEPŘESNOSTI VÝPOČTŮ NA NOMOGRAMECH

EVŽEN JOKL

(Došlo dne 30. října 1959)

Článek obsahuje vzorce pro odhad nepřesnosti výpočtů, prováděných pomocí nomogramů. Vzorce byly odvozeny podle geometrické struktury nomogramů. Vztahují se na průsečíkové a spojnicové nomogramy pro vztahy o třech proměnných.

1. Vztah  $z = F(x, y)$  mezi třemi proměnnými  $x, y, z$ , jež probíhají dané intervaly, je možno zobrazit průsečíkovým nomogramem se dvěma soustavami přímek, rovnoběžných s navzájem kolmými osami souřadnicovými  $(\xi), (\eta)$ , kótovaných hodnotami  $x$



Obr. 1.

resp.  $y$ , a soustavou čar, kótovanou hodnotami  $z$ . Rovnice těchto soustav jsou tvaru:  $\xi = f(x), \eta = g(y), \Phi(\xi, \eta, z) = 0$ . Nomogramu se užívá tak, že se určí poloha přímek s danými kótami  $x_0, y_0$ , a jejich průsečíkem prochází čára soustavy  $(z)$  s kótou výsledku  $z_0$ . Kromě jiných zdrojů nepřesností, než nejsou postižitelné (špatné grafické provedení nomogramu, nedbalost při užívání nomogramu aj.), jsou to následující:

1. Nepřesné určení polohy přímek s kótami  $x_0, y_0$  a tedy i jejich průsečíku. Místo bodu  $(x_0, y_0)$  je vzat bod  $(x_0 + \Delta x_0, y_0 + \Delta y_0)$ . Jím prochází čára soustavy  $(z)$ , jejíž kótu označme  $z_0 + \Delta z_0$  (obráz. 1).

2. Nepřesné určení kóty výsledkové čáry  $(z_0 + \Delta z_0)$ . Nepřesnost způsobenou touto operací označme  $\delta z_0$ .

Pro nepřesnost  $n(z_0)$  výsledku tedy platí  $n(z_0) = \Delta z_0 + \delta z_0$ . Pro odhad nepřesnosti  $n(z_0)$  vedme bodem  $(x_0, y_0)$  kolmici k čáře  $(z_0)$ . Na ní vytínají čáry  $(z)$  stupnice nějaké funkce  $S(z, x_0, y_0)$ . Označme  $\phi_0$  úhel čáry  $(z_0)$  a přímky  $(y_0)$  v bodě  $(x_0, y_0)$ ,  $\epsilon_1$  vzdálenost přímek  $(x_0)$  a  $(x_0 + \Delta x_0)$ ,  $\epsilon_2$  vzdálenost přímek  $(y_0)$  a  $(y_0 + \Delta y_0)$ .

Pak je přibližně  $\epsilon_2 \cos \phi_0 + \epsilon_1 \sin \phi_0 \approx \Delta S_0 \approx S'(z)_{z=z_0} \Delta z_0$ . Je-li  $\epsilon_3$  úsečka vyřezaná na zmíněné kolmici čarami  $(z_0 + \Delta z_0)$  a  $(z_0 + \Delta z_0 + \delta z_0)$ , platí přibližně  $\epsilon_3 \approx$

$\approx S'(z)_{z=z_0} \cdot \delta z_0$ . Pro odhad nepřesnosti  $n(z_0)$  máme tedy vzorec (index nula je v dalším vynechán)

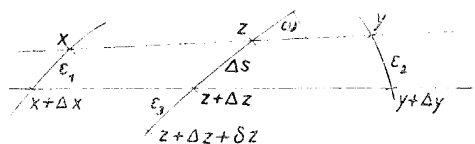
$$|n(z)| \leq \frac{1}{|S'(z)|} (|\varepsilon_2| |\cos \phi| + |\varepsilon_1| |\sin \phi| + |\varepsilon_3|).$$

Zpravidla se pokládá  $|\varepsilon_1|, |\varepsilon_2|, |\varepsilon_3| \leq 0,02$  cm, takže vzorec zní

$$(1) \quad |n(z)| \leq \frac{0,02}{|S'(z)|} (|\cos \phi| + |\sin \phi| + 1).$$

Význam vzorec spočívá mimo jiné v tom, že ukazuje, jak závisí nepřesnost na úhlu čar  $(z)$  a přímkou  $(x), (y)$ . Funkce  $|\cos \phi| + |\sin \phi|$  nabývá maxima pro  $\phi = 45^\circ$ . Jsou-li tedy hodnoty proměnné  $z$  počítány z nomogramu, je lepší takový nomogram, kdy čáry  $z$  svírají malý úhel s přímkami  $(x)$  nebo  $(y)$ .

Pro obecný případ, kdy čáry  $(x)$  a  $(y)$  nejsou k sobě kolmé, se lehko odvodí obdobnou úvahou vzorec



Obr. 2.

$$(2) \quad |n(z)| \leq \frac{0,02}{|S'(z)|} \left( \left| \frac{\sin \left( \frac{\alpha}{2} + \phi \right)}{\sin \frac{\alpha}{2}} \right| + 1 \right),$$

kde navíc  $\alpha$  je úhel čáry  $(x)$  a  $(y)$ .

2. Některé vztahy  $z = F(x, y)$  lze zobrazit spojnicovými nomogramy, skládajícími se ze tří stupnic  $(x), (y)$  a  $(z)$  ([4], str. 95n). Hodnota  $z$  se hledá tak, že se určí poloha bodů, které přísluší daným hodnotám  $x, y$  a určí se kóta průsečíku stupnice  $(z)$  s přímkou, spojující tyto body. Za hlavní zdroje nepřesností výsledku je třeba pokládat (obr. 2):

1. Nepřesné určení bodů  $(x)$  a  $(y)$ , a tedy i jejich spojnice (tzv. řešící přímky) a výsledkového bodu na stupnici  $(z)$ . Místo bodů  $(x), (y), (z)$  máme tedy body  $(x + \Delta x), (y + \Delta y), (z + \Delta z)$ .

2. Nepřesné určení kóty výsledkového bodu. Místo kóty  $z + \Delta z$  je určena kóta  $z + \Delta z + \delta z$ .

Označme  $\varepsilon_1$  vzdálenost bodů  $(x)$  a  $(x + \Delta x)$ ,  $\varepsilon_2$  vzdálenost bodů  $(y)$  a  $(y + \Delta y)$ ,  $\varepsilon_3$  vzdálenost bodů  $(z + \Delta z)$  a  $(z + \Delta z + \delta z)$ ,  $\bar{\varepsilon} = \max(|\varepsilon_1|, |\varepsilon_2|)$ ,  $\omega$  úhel řešící přímky a nositelky stupnice  $(z)$  v jejich průsečíku,  $s(z)$  oblouk stupnice  $(z)$ .

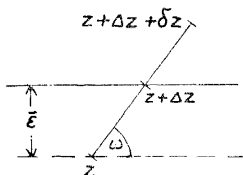
Je-li stupnice  $(z)$  mezi stupnicemi  $(x)$  a  $(y)$ , uvažujeme pro odhad nepřesnosti případ (nejméně příznivý), kdy nepřesně určená řešící přímka je rovnoběžná s přesnou, a jejich vzdálenost je  $\bar{\varepsilon}$  (obr. 3). Platí přibližně (obr. 3)  $s'(z) \cdot \Delta z \approx \Delta s \approx \bar{\varepsilon} \cdot \sin \omega$  a  $s'(z) \cdot \delta z \approx \varepsilon_3$ . Pro odhad nepřesnosti  $n(z)$  je tedy

$$(3) \quad |n(z)| \leq \frac{0,02}{|s'(z)|} \left( \frac{1}{|\sin \omega|} + 1 \right).$$

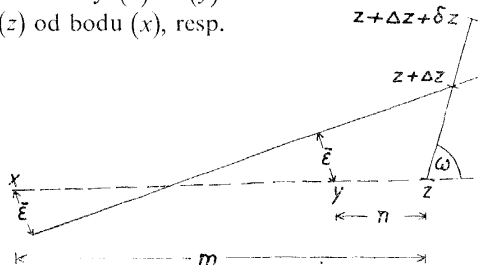
Je-li stupnice ( $z$ ) vně ( $x$ ) a ( $y$ ), nastává případ nejméně příznivý pro určení kóty  $z$  tehdy, je-li nepřesná řešící přímka vzdálená od bodů ( $x$ ) a ( $y$ ) o  $\bar{\varepsilon}$ , přičemž protíná správnou řešící přímku uprostřed mezi body ( $x$ ) a ( $y$ ).

Označme  $m$ , resp.  $n$  vzdálenosti bodu ( $z$ ) od bodu ( $x$ ), resp.

( $y$ ). Platí přibližně (obr. 4)



Obr. 3.



Obr. 4.

$$s'(z) \Delta z \approx \Delta s \approx \frac{m - (m - n) : 2}{(m - n) : 2} \cdot \frac{\bar{\varepsilon}}{\sin \omega} = \frac{(m + n) \bar{\varepsilon}}{(m - n) \sin \omega} \quad \text{a} \quad s'(z) \delta z \approx \varepsilon_3.$$

Pro odhad nepřesnosti výpočtu je tedy

$$(4) \quad |n(z)| \leq \frac{0,02}{|s'(z)|} \left( \left| \frac{m + n}{m - n} \right| \cdot \frac{1}{|\sin \omega|} + 1 \right).$$

3. Zvláštním, ale zato důležitým případem vztahů mezi třemi proměnnými jsou vztahy typu Cauchyho kanonického tvaru  $h_1(x)f_3(z) + h_2(y)g_3(z) + h_3(z) = 0$ . Při jejich zobrazení průsečíkovým nomogramem podle rovnic  $\xi = \alpha h_1(x)$ ,  $\eta = \beta h_2(y)$ ,

$\frac{\xi}{\alpha} f_3(z) + \frac{\eta}{\beta} g_3(z) + h_3(z) = 0$  ( $\alpha, \beta$  jsou nenulové konstanty) lze vzorec (1) upravit takto:

$$(5) \quad |n(z)| \leq \frac{0,02(|\beta f_3| + |\alpha g_3|)}{|\alpha \beta (h_1 f_3' + h_2 g_3' + h_3')|} + \frac{0,02}{|S'|}.$$

Cauchyho kanonický tvar lze zobrazit také spojnicovým nomogramem se dvěma příjímými rovnoběžnými stupnicemi podle rovnic ([4], str. 114):  $\xi_1 = 0$ ,  $\eta_1 = \alpha h_1$ ;  $\xi_2 = \delta$ ,  $\eta_2 = \beta h_2$ ;  $\xi_3 = \alpha \delta g_3 : (\beta f_3 + \alpha g_3)$ ,  $\eta_3 = -\alpha \beta h_3 : (\beta f_3 + \alpha g_3)$ . Označíme-li  $\psi$  úhel řešící přímky a stupnice ( $x$ ) (a tedy i ( $y$ )), pak můžeme ve vzorcích (3) a (4) násobit první člen v závorce ještě  $|\sin \psi|$ , protože vzdálenosti nepřesné řešící přímky od bodů ( $x$ ) a ( $y$ ) jsou nejvýše rovny  $\bar{\varepsilon} \sin \psi$ . Takto zpřesněné vzorce (3) a (4) lze upravit také na tvar (5), místo  $S'$  však bude  $s'$ .

4. Akad. PĚNFKOVSKIJ uvádí v práci [1] vzorec

$$(6) \quad |n(z)| \leq \left| \frac{\partial z}{\partial x} \right| \cdot \frac{\varepsilon_1}{|s'_1(x)|} + \left| \frac{\partial z}{\partial y} \right| \cdot \frac{\varepsilon_2}{|s'_2(y)|} + \frac{\varepsilon_3}{|s'_3(z)|}$$

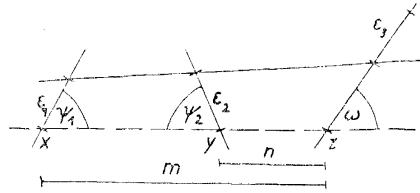
pro odhad nepřesností výpočtů na spojnicových nomogramech ( $s_1, s_2, s_3$  jsou oblouky na 1., 2., 3. stupnici,  $\varepsilon, \varepsilon_3$  jsou statisticky určené hodnoty, asi 0,02 cm). Tento vzorec je shodný s následujícím (obr. 5).

$$(7) \quad |n(z)| \leq \frac{1}{|s'(z)|} \left( \frac{|e_1 n \sin \psi_1| + |e_2 m \sin \psi_2|}{|(m \pm n) \sin \omega|} + \varepsilon_3 \right),$$

kde platí + (–), je-li stupnice ( $z$ ) mezi (vně) ( $x$ ) a ( $y$ ). Oba dávají nejlepší odhady, jsou však pro praktické užívání zbytečně komplikované.

5. Vzorců pro odhad nepřesností je možno užít:

1. K odhadu nepřesnosti konkrétního výpočtu na nomogramu. Z nomogramu se změří  $\alpha$ , resp.  $\omega, m, n, \phi$  a vypočte se (nebo odhadne)  $S'(z)$ , resp.  $s'(z)$ .



Obr. 5.

2. K odhadu maximální nepřesnosti výpočtů na určitém nomogramu. Z nomogramu se odhadne, pro které hodnoty  $\phi, \alpha$  atd. nabývá pravá strana příslušného vzorce maxima.

3. K výpočtu koeficientu stejnohlosti, kterou je třeba provést na určitý nomogram, aby nepřesnost výpočtů nepřesáhla danou hodnotu. Je-li největší nepřesnost výpočtů daného nomogramu  $n(z)$ , a požadovaná  $n^*(z)$ , pak koeficient stejnohlosti je  $k = \frac{n^*(z)}{n(z)}$ . Pro odhad nepřesností je možno považovat funkci  $S$ , resp.  $s$  v určitém

intervalu za lineární. U průsečíkového nomogramu je možno zvolit na kolmici k čáře ( $z$ ), jdoucí bodem ( $x, y$ ) dva body na čarách s kótami  $z_1$  a  $z_2$  tak, aby bylo  $z_1 < z < z_2$ , a psát  $S = Lz : (z_2 - z_1)$ , kde  $L$  je vzdálenost zvolených dvou bodů. U spojnicového nomogramu se zvolí body s kótami  $z_1 < z < z_2$  na stupnici ( $z$ ).

Někdy se odhaduje tzv. relativní nepřesnost výpočtu  $\rho = \frac{n(z)}{z}$ . Pak je možno (je-li funkce  $S$ , resp.  $s$  v blízkosti výsledkového bodu přibližně logaritmická) obdobně položit  $z \cdot S' = L \cdot 0,434 : \log \frac{z_2}{z_1}$ .

#### Literatura

- [1] M. V. Pěnkovskij: O odhadu chyby výpočtu na spojnicových nomogramech a o jejich nejlepší transformaci. Trudy otděl. matem. i meč. AN KazSSR, 1958.
- [2] T. Bulabajev: Pokusné určení parametrů chyb výpočtů na nomogramu. Věstník AN KazSSR, 9 (162), 1958.
- [3] T. Bulabajev: Odhad chyby výpočtu na nomogramu s bínárním polem s výsledkem na stupnici. Věstník AN KazSSR, 3 (168), 1959.
- [4] V. Pleskot: Nomografie a grafický počet v technické praxi, SNTL, Praha 1956.
- [5] Hasbroek: Statistický rozbor chyb při čtení na nomogramech. Haag 1958.

## Резюме

### К ОЦЕНКЕ ПОГРЕШНОСТИ ВЫЧИСЛЕНИЙ НА НОМОГРАММАХ

ЭВЖЕН ЙОКЛ (Evžen Jokl)

Статья содержит формулы для оценки погрешностей вычислений на номограммах. Эти формулы были составлены с учетом геометрического характера соответствующих номограмм.

Формула (1) относится к сетчатым номограммам с криволинейной ответной системой (смысл входящих в нее величин ясен из черт. 1), формула (2) к любой сетчатой номограмме.

Формула (3) применима для номограмм из выравненных точек в случае, если ответная шкала находится между остальными (черт. 2), формула (4) применима в противоположном случае (черт. 3)

Формула (5) применима в некоторых случаях изображения зависимостей вида  $h_1 f_3 + h_2 g_3 + h_3 = 0$ .

Формула (7) эквивалентна формуле (6) акад. Пентковского. Она является уточнением оценок (3) и (4).

## Zusammenfassung

### ZUR ABSCHÄTZUNG DER FEHLER BEI DEN RECHNUNGEN NACH NOMOGRAMMEN

EVŽEN JOKL

In der Arbeit sind einige Formeln für die Abschätzung der Fehler (Ungenauigkeiten) bei den Berechnungen nach Nomogrammen angegeben. Die Formeln sind in Übereinstimmung mit der geometrischen Struktur der betreffenden Nomogramme gegeben.

Formel (1) gilt für Cartesische Netztafeln mit krummlinigen Lösungsscharen, Formel (2) für jede Netztafel.

Formel (3) dient für die Fluchtlinientafeln, mit der Lösungsskala zwischen den beiden anderen (Abb. 2), Formel (4) ist im entgegengesetzten Falle anwendbar (Abb. 3).

Nach Formel (5) kann man die Fehler abschätzen in einigen Fällen, wenn die nomografierte Funktion der Gestalt  $h_1 f_3 + h_2 g_3 + h_3 = 0$  ist.

Formel (7) (Abb. 5) gibt genauere Abschätzungen als (3) und (4), ist aber ein wenig kompliziert.