Libuše Marková

Konstrukce zrcadlové plochy zobrazující k rovinným obrazcům útvary inversní

Aplikace matematiky, Vol. 7 (1962), No. 5, 387--392

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/102820

KONSTRUKCE ZRCADLOVÉ PLOCHY ZOBRAZUJÍCÍ K ROVINNÝM OBRAZCŮM ÚTVARY INVERSNÍ

LIBUŠE MARKOVÁ

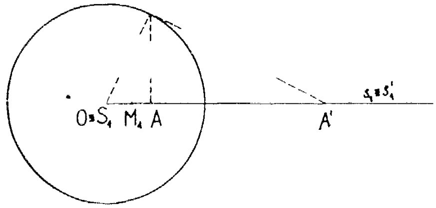
(Došlo dne 25. května 1961.)

Článek pojednává o způsobu nalezení zrcadlové plochy, která k daným rovinným obrazcům zobrazuje útvary inversní. Ukazuje se, že hledaná plocha je rotační a konstruuje se její meridián při rovnoběžném osvětlení této plochy.

Při řešení různých matematických úloh se často setkáváme s bodovým zobrazením v rovině. Nejznámější bodová zobrazení jsou na příklad shodná zobrazení jako je osová souměrnost, posunutí, středová souměrnost, otáčení. U těchto lineárních zobrazení lze snadno k daným rovinným obrazcům zakreslit jejich obrazy pomocí rovinných zrcadel.

Nejjednodušší nelineární bodové zobrazení je kruhová inverse. Zde se naskýtá otázka, zda je možno konstruovat zrcadlovou plochu, která by k daným rovinným útvarům zobrazovala útvary inversní. Řešení tohoto problému je úkolem našeho článku.

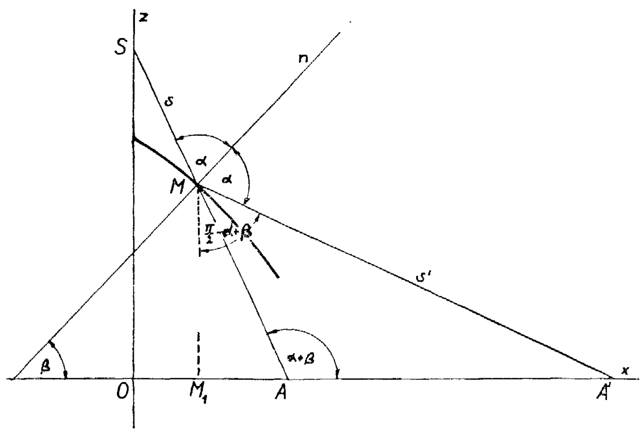
Mějme v libovolné rovině τ kruhovou inversi o středu O a poloměru r (viz obr. 1). Libovolnému bodu A bude v této inversi odpovídat bod A'. Bod A můžeme současně považovat za středový průmět libovolného bodu M hledané zrcadlové plochy do roviny τ, při čemž střed promítání S, ze kterého plochu osvětlujeme, volíme tak, aby jeho pravoúhlý průmět do roviny τ padl do středu kruhové inverse O. Potom paprsek světla s, který dopadne na plochu v bodě M pod úhlem α se odráží pod úhlem α a protíná rovinu τ v bodě A'. Pravoúhlé průměty paprsku s a s' jsou na přímce AA' právě tehdy, jestliže rovina, ve které leží paprsky s a s', prochází středem kruhové inverse O, tedy i středem promítání S. V této rovině leží také normála k ploše. Vezmeme-li si jinou rovinu procházející přímkou OS, případ je stejný. Můžeme tedy říci, že každá



Obr. 1.

rovina procházející přímkou OS a libovolným bodem M hledané plochy obsahuje normálu n k této ploše v bodě M. Toto je vlastnost plochy rotační, jejíž osou rotace je přímka OS.

Paprsky dopadající na plochu ve vrcholu se musí odrážet rovnoběžně s rovinou τ, neboť středu inverse O odpovídají body nevlastní přímky roviny τ. Potom tečna k meridiánu v tomto bodě bude svírat s osou rotace úhel $\pi/4$ a vrchol rotační plochy je singulárním bodem.



Obr. 2a.

Naším úkolem je nyní najít meridián hledané rotační plochy. K tomuto účelu rovinu τ umístíme do roviny xy a střed kruhové inverse O do počátku souřadnicového systému. Potom osou hledané rotační plochy bude osa z-ová. Předpokládejme, že meridián hledané rotační plochy je křivka $z = f(x)$, která je definována v intervalu $\langle 0; r \rangle$. Plochu osvětlíme paprsky procházející bodem $S(0; 0; v)$ (viz obr. 2a). Nechť bod M je bodem dopadu paprsku na hledané ploše. V tomto bodě sestrojíme odražený paprsek s'. Bod A je středovým průmětem bodu M na rovinu xy. Bod A' je průsečík odraženého paprsku s' s rovinou xy (tj. s osou x). Aby bod A byl ve vztahu kruhové inverse s bodem A' musí platit

$$OA \,.\, OA' = r^2\,, \tag{1}$$

při čemž r je poloměr kruhové inverse.

Souřadnice bodu M v rovině xz označíme x, z. Potom platí $OA = x + z\,.$ $.\,\mathrm{cotg}\,[\pi - (\alpha + \beta)] = x - z\,.\,\mathrm{cotg}\,(\alpha + \beta)$. Vzdálenost OA' můžeme vyjádřit ve tvaru $OA' = x + z\,.\,\mathrm{tg}\,(\pi/2 - \alpha + \beta)$, kde α je úhel dopadu paprsku s a β je úhel, který svírá normála plochy s osou x. Jelikož směrnice normály k meridiánu v bodě $M(x, z)$ má hodnotu $k_1 = -1/z' = \mathrm{tg}\,\beta$ a směrnice přímky procházející body M, S (tj. paprsku s) má hodnotu $k_2 = (z - v)/x = \mathrm{tg}\,(\alpha + \beta)$, je

$$\operatorname{tg} 2\beta = \frac{2 \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg}^2 \beta} = \frac{-2z'}{z'^2 - 1}$$

a

$$\operatorname{tg}\left[\frac{\pi}{2} - (\alpha + \beta)\right] = \operatorname{cotg}(\alpha + \beta) = \frac{x}{z - v} \quad \text{pro} \quad z \neq v\,.$$

Můžeme tedy $\operatorname{tg}(\pi/2 - \alpha + \beta)$ psát ve tvaru

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha + \beta\right) = \operatorname{tg}\left[\frac{\pi}{2} - (\alpha + \beta) + 2\beta\right] =$$

$$= \left[\frac{x}{z - v} + \frac{-2z'}{z'^2 - 1}\right] : \left[1 - \frac{x}{z - v} \cdot \frac{-2z'}{z'^2 - 1}\right]$$

a po konečné úpravě dostaneme

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha + \beta\right) = \frac{x(z'^2 - 1) - 2z'(z - v)}{(z - v)(z'^2 - 1) + 2xz'}\,.$$

Pro vzdálenost OA a OA' tedy platí

$$OA = x - \frac{xz}{z - v}\,, \quad OA' = x + z \cdot \frac{x(z'^2 - 1) - 2z'(z - v)}{(z - v)(z'^2 - 1) + 2xz'}\,.$$

Důsledek (1) plynoucí z kruhové inverse mezi body A a A' pro funkci $z = f(x)$ lze nyní napsat ve tvaru

$$\left[x - \frac{xz}{z - v}\right] \cdot \left[x + z \cdot \frac{x(z'^2 - 1) - 2z'(z - v)}{(z - v)(z'^2 - 1) + 2xz'}\right] = r^2\,.$$

Po úpravě obdržíme diferenciální rovnici

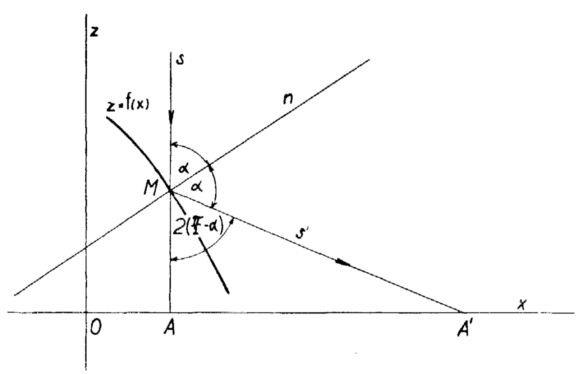
(2) $$z'^2 + 2z' \cdot \frac{-x^3 v + z^2 x v - z x v^2 - r^2 x z + r^2 x v}{2r^2 v z - 2x^2 v z + x^2 v^2 - r^2 z^2 - r^2 v^2} - 1 = 0\,,$$

ze které plynou dvě různá řešení. Existují tedy dvě množiny rotačních ploch, které k daným rovinným obrazcům zobrazují útvary inversní.

Je-li v nekonečně veliké, střed světla je bodem nevlastním a jde o rovnoběžné osvětlení (viz obr. 2b). Potom diferenciální rovnice (2) je tvaru

(3)

$$z'^2 - 2z' \cdot \frac{xz}{x^2 - r^2} - 1 = 0.$$



Obr. 2b.

Ze dvou existujících řešení si zvolíme to, které je určeno rovnicí

$$z' = \frac{xz}{x^2 - r^2} - \left[\left(\frac{xz}{x^2 - r^2}\right)^2 + 1\right]^{1/2}. \tag{4}$$

Tuto diferenciální rovnici řešíme pak v jednotlivých případech (to jest pro určité r a určité počáteční podmínky) numericky metodou Runge-Kutteovou. Nechť na příklad je $r = 3$. Hledejme řešení rovnice (4) při počátečních podmínkách $x_0 = 0$, $z_0 = 5$. Souřadnice x-ová bodu M se bude pohybovat v mezích $0 \leqq x \leqq 3$. Tento interval rozdělíme na jednotlivé intervaly např. o šířce $h = x_i - x_{i-1} = 0{,}2$ a hledáme z-ové souřadnice bodů křivky $z = f(x)$, odpovídající zvoleným hodnotám x-ových souřadnic.

Označíme-li $z' = g(x; z)$, kde $g(x; z)$ je pravá strana rovnice (4), počáteční bod $M_0 = (x_0; z_0)$, pak souřadnice z_1 bodu $M_1(x_1; z_1)$ při dané hodnotě $x_1 = x_0 + h = x_0 + 0{,}2$ vypočítáme podle známých vzorců

$$z_1 = z_0 + k\,,$$

při čemž

$$k = \tfrac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)\,,$$

kde

$$\begin{aligned} k_1 &= h\,.\,g(x_0; z_0)\,,\\ k_2 &= h\,.\,g(x_0 + \tfrac{1}{2}h,\ z_0 + \tfrac{1}{2}k_1)\,,\\ k_3 &= h\,.\,g(x_0 + \tfrac{1}{2}h,\ z_0 + \tfrac{1}{2}k_2)\,,\\ k_4 &= h\,.\,g(x_0 + h,\ z_0 + k_3)\,. \end{aligned}$$

Při dalším výpočtu bod $M_1(x_1; z_1)$ považujeme za výchozí a hledáme souřadnici z_2 bodu $M_2(x_2; z_2)$ při daném $x_2 = x_1 + h = x_1 + 0{,}2$ stejným způsobem.

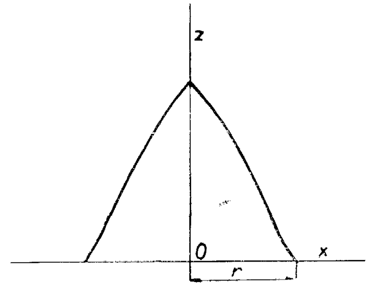
Takto získáme příslušné množství bodů, ze kterých lze křivku sestrojit.

Jednotlivé výsledky lze sestavit do přehledné tabulky:

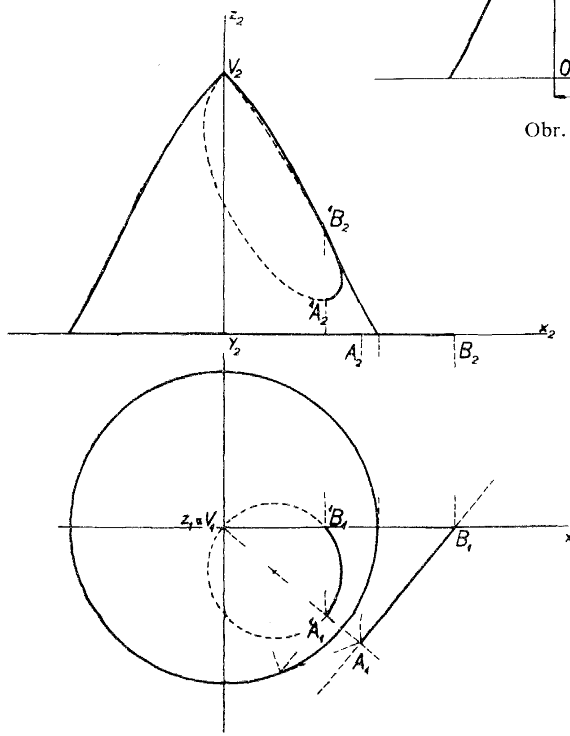
M	M_0	M_1	M_2	M_3	M_4	M_5	M_6
x	0,0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	1,2
z	5,0000	4,7888	4,5548	4,2979	4,0181	3,7157	3,3915
M_7	M_8	M_9	M_{10}	M_{11}	M_{12}	M_{13}	M_{14}
1,4	1,6	1,8	2,0	2,2	2,4	2,6	2,8
3,0465	2,6820	2,3000	1,9029	1,4942	1,0791	0,6661	0,2732
M_{15}	M_{16}						
3,0	3,2						
0,0987	−0,2908						

Body M_i, $i = 0, 1, 2, \ldots, 16$, definují hledaný meridián $z = f(x)$. Jestliže se tento meridián otáčí kolem osy z, vytváří hledanou rotační plochu (viz obr. 3).

Tuto rotační plochu omezíme zdola rovinou xy. Světelné paprsky dopadají na ni shora. Zobrazuje tedy inversní obrazce při pohledu shora. Druhým řešením rovnice (3) je rotační plocha, kterou omezíme rovinou $\bar{\alpha}$ rovnoběžnou s rovinou xy, při čemž vrchol této rotační plochy je pod rovinou $\bar{\alpha}$. Světelné paprsky musí na tuto rovinu dopadat zespodu, to znamená, že druhé řešení zobrazuje inversní obrazce při pohledu zespodu. Pro snadnější nazírání je vhodnější první řešení.



Obr. 3.



Obr. 4.

Na obr. 4 je znázorněno zrcadlení úsečky AB na dané rotační ploše v Mongeově projekci. Rotační plocha má podstavu v půdorysně, úsečka AB tedy také leží v půdorysně. Potom inversní útvar k úsečce AB vidíme na půdoryse rotační plochy. Jeho nárysem je křivka, kterou lze snadno sestrojit.

Резюме

ПОСТРОЕНИЕ ЗЕРКАЛЬНОЙ ПОВЕРХНОСТИ, ИЗОБРАЖАЮЩЕЙ ИНВЕРЗНЫЕ ПОСТРОЕНИЯ ФИГУР НА ПЛОСКОСТИ

ЛИБУШЕ МАРКОВА (Libuše Marková)

Автор статьи занимается простейшим нелинейным точечным изображением на плоскости — круговой инверзией. Приводится способ определения зеркальной поверхности, изображающей инверзное построение фигур на плоскости. Доказывается, что искомая поверхность есть поверхность вращения с особой точкой в вершине. Автор сосредоточивается на отыскание меридиана этой поверхности вращения при центральном освещении её. Затем строится меридиан поверхности вращения для частного случая, когда центр освещения находится в бесконечности, т. е. при параллельном освещении.

Summary

THE CONSTRUCTION OF A MIRROR SURFACE PICTURING FIGURES INVERSE TO PLANE FIGURES

LIBUŠE MARKOVÁ

The article deals with the simplest non-linear point representation on the surface by means of circular inversion. It is indicated how to find the reflecting mirror surface which will picture figures inverse to given plane figures. This surface is a surface of revolution with a singuler point in the vertex, and there arises the problem of determination of the meridian of this surface of revolution when it is centrally illuminated. The meridian of the surface of revolution for special cases when the centre of light is an infinite point, *i. e.* for the case of parallel illumination, is then constructed.

Adresa autora: *Libuše Marková*, Katedra algebry a geometrie University Palackého, Fierlingerova 10, Olomouc.