Ivo Babuška

Die Stabilität mit Rücksicht auf das Definitionsgebiet und die Frage der Formulierung des Plattenproblems

Aplikace matematiky, Vol. 7 (1962), No. 6, 463--467

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/102830`

PŘEDBĚŽNÁ SDĚLENÍ

DIE STABILITÄT MIT RÜCKSICHT AUF DAS DEFINITIONSGEBIET UND DIE FRAGE DER FORMULIERUNG DES PLATTENPROBLEMS

[VORBERICHT]

IVO BABUŠKA

(Eingegangen am 9. April 1962.)

1. EINLEITUNG

In Arbeit [1] haben wir uns mit der Frage der Formulierung von Problemen der Elastizitätstheorie mit Hilfe der Methoden der technischen Theorie beschäftigt. Wir haben den Begriff der assymptotischen Optimierung eingeführt und haben gezeigt, dass in dem allereinfachsten Falle des Trägers die Bernoullische Hypothese der ebenen Querschnitte die einzige optimale Hypothese in dem eingeführten Sinne ist.

Wir haben weiter gezeigt, dass die Methoden der technischen Elastizitätstheorie notwendig als Übergangsmethoden von einem mehrdimensionalem Problem auf ein wenigerdimensionales angesehen werden müssen, wobei der auf der Bernoullischen Hypothese beruhende Vorgang der erste Schritt des zur genauen Lösung konvergierenden Algoritmus ist. In dieser ganzen Arbeit [1] wurde von der Forderung einer optimalen Approximation der Lösung eines mehrdimensionalen Problems durch die Lösung eines wenigerdimensionalen ausgegangen.

Wir zeigen in der vorliegenden Arbeit, dass die Auffassung, welche wir in [1] beschrieben haben, nur eine Seite der Problematik des Überganges eines mehrdimensionalen Problems auf ein wenigerdimensionales ausdrückt. Eine weitere wichtige Frage ist die Erhaltung resp. die Übertragung der Haupteigenschaften des ursprünglichen dreidimensionalen Problems. Als eine dieser Haupteigenschaften müssen wir den Verlauf der Lösung bei kleinen Veränderungen des Definitionsgebietes betrachten.

In den Arbeiten [2] und [3] haben wir gezeigt, dass es in dem geläufigem Sinne von S. GERMAIN formuliertem Problem der freigelagerten Platte zu einer überraschenden Unstabilität in Bezug auf das Definitionsgebiet kommt.

Wir haben bewiesen, dass $u_n(x, y) \to \bar{u}(x, y)$ gilt, wobei $\bar{u}(x, y) \neq u(x, y)$ ist, wenn wir mit $u_n(x, y)$ die Durchbiegung der freigelagerten, gleichmässig belasteten Platte von der Form eines regelmässigen **n**-Ecks bezeichnen und diese n-Ecke für $n \to \infty$ zum Kreis konvergieren: mit $u(x, y)$ bezeichnen wir die Lösung der Kreisplatte.

In der vorliegenden Arbeit zeigen wir nun, dass dieser Paradox zu dem es in der ursprünglichen dreidimensionalen Formulierung nicht kommt, durch eine ungeeignete Transformation auf ein zweidimensionales Problem hervorgerufen wird.

2. DIE STABILITÄT DES DREIDIMENSIONALEN PROBLEMS DER FREIGELAGERTEN PLATTE.

Definition 1. *Es sei P_n resp. P ein regelmässiges in einen Einheitskreis eingeschriebenes offenes n-Eck resp. ein offener Einheitskreis und es sei*

$$\Omega_n = \mathsf{E}[x, y, z; (x, y) \in P_n, |z| < h]$$

resp.

$$\Omega = \mathsf{E}[x, y, z; (x, y) \in P, |z| < h] .$$

Es sei $f(x, y)$ eine mit dem Quadrat integriebare Funktion mit kompaktem Träger in P_n resp. P. Dann bezeichnen wir als dreidimensionales Problem einer freigelagerten Platte von der Form P_n resp. P und der Belastung f die Aufgabe die auf Ω_n resp. Ω definierten Funktionen $u(x, y, z)$, $v(x, y, z)$ $w(x, y, z)$ zu finden, welche das quadratische Funktional

$$(1) \qquad W(u, v, w) = \iiint_{\Omega_n \,\mathrm{resp.}\, \Omega} \left\{2\mu \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2 + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \mu \left[\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right)^2\right]\right\} \mathrm{d}x \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}z -$$
$$- 2 \iint_{P_n \,\mathrm{resp.}\, P} f(x, y) \left[w(x, y, h) + w(x, y, -h)\right] \mathrm{d}x \,\mathrm{d}y$$

in der Klasse der Funktionen, welche quadratisch integrierbare erste Ableitungen besitzen, minimalisieren, wobei $w(x, y, z) = 0$ auf $\hat{\Omega}_n$ resp. $\hat{\Omega}_n$ gilt, wenn

$$\hat{\Omega}_n = \mathsf{E}[x, y, z; (x, y) \in \dot{P}_n, |z| < h] ,$$
$$\hat{\Omega} = \mathsf{E}[x, y, z; (x, y) \in \dot{P} , |z| < h]$$

ist und $\dot{P}_n$ resp. P der Rand des Gebietes P_n resp. P ist.

Insofern wir die Randbedingung der Funktion $w(x, y, z)$ auf $\hat{\Omega}_n$ resp. $\hat{\Omega}$ in dem geläufigem verallgemeinertem Sinne (d. h. im Durchschnitt) verstehen, lässt sich zeigen, dass die Lösung der Aufgabe im Sinne der Definition 1 existiert und das gerade als einzige Lösung. Die Definition 1 formuliert in funktionalanalytischer (energetischer) Form das Problem der freigelagerten Platte aus einem Material mit der Poissonschen Konstanten gleich Null und auf dem oberen und unteren Rand mit einer durch die Funktion $f(x, y)$ ausgedrückten Belastung versehen. Wenn wir diese Bedingungen durch die Spannung ausdrücken, erhalten wir auf dem oberen und unteren Rand der Platte

$$Z_z(x, y, h) = f(x, y), \quad Z_z(x, y, -h) = -f(x, y),$$
$$X_z(x, y, h) = Y_z(x, y, h) = 0$$

und auf den Seiten $w = 0$ und $\sigma_n = 0$, $\tau_t = 0$ wobei wir σ_n resp. τ_t die normale resp. tangentiale, zur z-Achse senkrechte Komponente des Spannungsvektors bezeichnet haben. Die Funktionen u, v, w erfüllen in Ω resp. Ω_n die Gleichung von Lamé

$$\frac{\partial \Theta}{\partial x} + \Delta u = 0\,, \qquad \frac{\partial \Theta}{\partial y} + \Delta v = 0\,, \qquad \frac{\partial \Theta}{\partial z} + \Delta w = 0\,, \tag{2}$$

$$\Theta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}, \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Offensichtlich lässt sich die freie Lagerung in der dreidimensionalen Formulation verschieden ausdrücken. Die angeführte Formulierung drückt jedoch den intuitiven Inhalt der freien Lagerung aus.

Es gilt folgender Satz:

Satz 1. *Es sei P_n, $n = m, m + 1, \ldots$, eine Folge regelmässiger n-Ecke (s. Def. 1.) Es habe f einen kompakten Träger auf P_m. Wir bezeichnen (u_n, v_n, w_n) resp. (u, v, w) die Lösung des im Sinne der Definition 1 ausgedrückten Problems einer freigelagerten Platte von der Form P_n resp. P und die Belastung f. Dann gilt*

$$\lim_{n\to\infty} \iiint_{\Omega_n} \left\{2\mu\left[\left(\frac{\partial(u_n - u)}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial(v_n - v)}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial(w_n - w)}{\partial z}\right)^2 + \right.\right.$$
$$+ \mu\left[\left(\frac{\partial(u_n - u)}{\partial y} + \frac{\partial(v_n - v)}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial(u_n - u)}{\partial z} + \frac{\partial(w_n - w)}{\partial x}\right)^2 + \right.$$
$$\left.\left. + \left(\frac{\partial(v_n - v)}{\partial z} + \frac{\partial(w_n - w)}{\partial y}\right)^2\right]\right\} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = 0\,. \tag{3}$$

Wir bemerken, dass Satz 1 auch unter allgemeineren Voraussetuzngen über die Folge der Gebiete P_n gilt. Zu einem Vergleich mit den in der Einleitung angeführten Paradox ist diese Behauptung vollkommen ausreichend.

Aus der energetischen Konvergenz (Ausdruck (3)) folgt auch die fast gleichmässige Punktkonvergenz innerhalb von Ω_n. Wenn wir Satz 1 mit den Ergebnissen in [2] und [3] vergleichen, wo die Unstabilität des biharmonischen Problems bewiesen wird, so sehen wir, dass der Paradox durch eine ungeeignete Wahl der Transformation des dreidimensionalen Problems auf ein zweidimensionales hervorgerufen wird.

3. STABILITÄT DES PROBLEMS EINER FREIGELAGERTEN PLATTE IN ZWEIDIMENSIONALER FORMULATION

In Arbeit [4] haben wir gezeigt, dass wir die klassische Formulation des Problems der Platte im Sinne der Theorie von Sophie Germain als Eulersche Gleichung für die Minimalisierung des quadratischen Funktionals (1) in der Klasse der Funktionen

$$u(x, y, z) = -z \frac{\partial w}{\partial x}(x, y), \quad v(x, y, z) = -z \frac{\partial w}{\partial y}(x, y), \quad w(x, y, z) = w(x, y), \tag{4}$$

mit der Bedingungen $w = 0$ auf $\dot{P}_n$ resp. $\dot{P}$, erhalten. Die Einengung der Klasse von Funktionen durch die Beziehungen (4) in Bezug auf die in Definition 1 erwogene Klasse drückt eigentlich die Hypothese von Bernoulli aus, d. h. die Hypothese der ebenen Querschnitte und der Orthogonalität auf die Zentralfläche. Wir führen nun die Einengung so aus, dass wir die Voraussetzung über die ebenen Querschnitte beibehalten aber die Voraussetzung über die Orthogonalität auf die Zentralfläche auslassen. Dies erreichen wir wenn wir statt (4) die Beziehungen

$$u(x, y, z) = -zp(x, y), \quad v(x, y, z) = -zq(x, y), \quad w(x, y, z) = w(x, y) \tag{5}$$

in Betracht nehmen. Wir erhalten nun folgende Definition des Plattenproblems.

Definition 2. *Es sei P_n resp. P ein regelmässiges (offenes) in einen Einheitskreis eingeschriebenes n-Eck resp. ein (offener) Einheitskreis. Es sei $f(x, y)$ eine mit dem Quadrat integrierbare Funktion mit einem kompakten Träger auf P_n resp. P. Dann bezeichnen wir als verallgemeinertes zweidimensionales Problem einer freigelagerten Platte von der Form P_n resp. P für eine Belastung f die Aufgabe solche auf P_n resp. P definierte Funktionen $p(x, y)$, $q(x, y)$, $w(x, y)$ zu finden, welche das quadratische Funktional*

$$W(p, q, w) = \iint_{P_n \text{ resp. } P} \left\{ \frac{2}{3} h^2 \, 2\mu \left[\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial q}{\partial y}\right)^2 \right] + \right.$$
$$\left. + \mu \left[\left(\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial q}{\partial x}\right)^2 \frac{2}{3} h^3 + \left(-p + \frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 2h + \left(-q + \frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 2h \right] \right\} \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$$
$$- 2 \iint_{P_n \text{ resp. } P} f(x, y) \, 2w(x, y) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$$

in der Klasse der Funktionen minimalisieren, welche quadratisch integrierbare erste Ableitungen besitzen und $w = 0$ auf $\dot{P}_n$ resp. $\dot{P}$ gilt.

Insofern wir die Randbedingung für die Funktion $w(x, y, z)$ auf P_n und P in dem gewöhnlichen verallgemeinerten Sinne verstehen, d. h. im Mittel, so lasst sich zeigen, dass gerade nur eine einzige Lösung im Sinne der Definition 2 existiert. Die Definition 2 formuliert in funktionalanalytischer Form das Plattenproblem mit Einberechnung der Verschiebungskräfte Wenn wir die Eulerschen Gleichungen für die Funktion p, q, w aufschreiben, so erhalten wir ein System von drei Gleichungen zweiter Ordnung. Man kann nun folgenden Satz beweisen.

Satz 2. *Es sei P_n, $n = m, m + 1, \ldots$ eine Folge regelmässiger n-Ecke und P ein Kreis (S. Def. 1.). Es habe f einen kompakten Träger auf P_m. Wir bezeichnen (p_n, q_n, w_m) resp. (p, q, w) die Lösung des Problems einer freigelagerten Platte von der Form P_n resp. P im Sinne der Definition 2. Dann gilt*

$$\lim_{n\to\infty} \iint_{P_n} \left\{ 2\mu \frac{2}{3} h^3 \left[\left(\frac{\partial(p_n - p)}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial(q_n - q)}{\partial y} \right)^2 \right] + \right.$$
$$+ \mu \left[\frac{2}{3} h^3 \left(\frac{\partial(p_n - p)}{\partial y} + \frac{\partial(q_n - q)}{\partial x} \right)^2 + \left(-(p_n - p) + \frac{\partial(w_n - w)}{\partial x} \right)^2 2h + \right.$$
$$\left. \left. + \left(-(q_n - q) + \frac{\partial(w_n - w)}{\partial y} \right)^2 2h \right] \right\} \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = 0 \, .$$

Satz 2 gilt auch unter etwas allgemeineren Voraussetzungen als hier ausgesprochen wurden. Wir sehen, dass zum Unterschied von der klassischen Formulation von Sophie Germain die verallgemeinerte Formulation im Sinne der Definition 2 die grundliegenden Eigenschaften des dreidimensionalen Problems beibehält.

Literaturverzeichnis

[1] *I. Babuška, M. Práger:* Reissnerian Algorithmus in the Theory of Elasticity. Bull. Acad. Pol. VIII, No 8, 1960, 411–417. Рейснеровы алгоритмы в теории упругости. Механика, перид. сб. иноср. статей, 1961, № 6, 123–128.

[2] *I. Babuška:* Die Abhängigkeit der Lösung der Elastizitätsproblemen von kleinen Veränderungen des Definitionsgebietes. ZAMM 39, 1959, H. 9/11.

[3] *И. Бабушка:* Устойчивость областей определения по отношению к основным задачам теории дифференциальных уравнений в частных производных, главным образом связи с теорией упругости. Чех.-мат. журнал 11 (86), 1961, 76–105, 165–203.

[4] *I. Babuška, R. Babušková, I. Hlaváček, B. Kepr, L. Pachta, M. Práger, J. Švejdová:* Algoritmy Reissnerova typu v matematické teorii pružnosti. Sborník ČVUT 1962.

Adresa autora: Inž. dr. *Ivo Babuška* Dr.Sc., Matematický ústav ČSAV, Praha 1, Žitná 25.