

# Aplikace matematiky

---

Ivo Babuška

Numerische Stabilität des Ritzschen Verfahrens

*Aplikace matematiky*, Vol. 10 (1965), No. 3, 196--199

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/102948>

## Terms of use:

© Institute of Mathematics AS CR, 1965

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

NUMERISCHE STABILITÄT DES RITZSCHEN VERFAHRENS

IVO BABUŠKA

(Zum Thema b)

Die Arbeit [1] behandelt Probleme der optimalen Wahl von Koordinatenfunktionen bei der Verwendung der Ritzschen Methode zur Lösung einer symmetrischen, positiv definiten Aufgabe

$$(1) \quad Ay = f. \quad (A^{-1} \text{ ist total stetig.})$$

Nach dem bekannten Prinzip der Ritzschen Methode setzt man

$$(2) \quad {}^N y = \sum_{i=1}^N c_i y_i$$

wobei man die Koeffizienten  $c_i$  als Lösung des Gleichungsystems

$$(3) \quad \sum_{i=1}^N [y_i, y_j] c_i = (f, y_j), \quad j = 1, 2, \dots, n$$

erhält, wo  $[y_i, y_j] = (Ay_i, y_j)$  ist.

Die Gleichungen (3) und (2) bestimmen einen angehäherten inversen Operator  $A_{(y_1, \dots, y_n)}^{-1}$ . In der Arbeit [1] ist die Problematik der Minimalisierung der Norm des Fehleroperators  $A^{-1} - A_{(y_1, \dots, y_n)}^{-1}$  angedeutet. Für diese Optimierung sind nicht die Koordinatenfunktionen  $y_1, \dots, y_n$ , sondern nur ihre lineare Hülle ausschlaggebend. Für die praktische Lösung, d.h. unter Inbetrachtung der Fehler im numerischen Rechenprozess ist nicht nur die Hülle von Bedeutung, sondern auch die Koordinatenfunktionen  $y_i$ .

Es gilt folgender

**Satz.** *Es seien zwei ähnliche (vgl. [1]) selbstadjungierte Aufgaben für Differentialoperatoren 2l-ter Ordnung auf genügend glatten Gebieten mit homogenen Randbedingungen*

$$Ay = f, \quad A^*y = f$$

gegeben.

Es seien  $y_i, i = 1, 2, \dots$  orthonormale Eigenfunktionen für die Aufgabe

$$A^*y = \lambda y \quad ((A^*y_i, y_j) = \delta_{ij}).$$

Setzen wir weiter voraus, dass der numerische Rechenprozess der Berechnung der Koeffizienten  $[y_i, y_j]$  und  $(f, y_j)$  bei Festkommarechnung eine  $\alpha_0 - L$ -Folge von Prozessen (vgl. [2]) ist.

Die Berechnung der Koeffizienten  $c_i$  aus (3) mit Hilfe der Gauss'schen Elimination bildet dann eine  $\alpha_2 - L$ -Folge.

Wenn weiter noch  $|y_j(x_0)| \leq k$  ( $k$  unabhängig von  $j$ ) ist und die Berechnung der Werte  $y_j(x_0)$   $\alpha_0 - L$ -Folgen sind, dann ist die Berechnung der  $y_j(x_0)$  eine  $\alpha_{2,5} - L$ -Folge. Wenn noch  $\sum_{j=1}^N y_j^2(x_0) \leq z$  ist ( $z$  unabhängig von  $N$ ), dann bildet die Berechnung der  ${}^N y(x_0)$  eine  $\alpha_2 - L$ -Folge.

Es sei weiter  $\tilde{A}^{-1}$  die Inverse zur Matrix (3) mit den Koeffizienten  $[\widetilde{y_1}, \widetilde{y_j}]$ , die wir numerisch durch die Gauss'sche Elimination erhalten haben (unter den oben angeführten Bedingungen), und es sei weiter  $R = \widetilde{A\tilde{A}^{-1}}$  (die Multiplikation ist wieder numerisch durchgeführt). Dann bildet die Berechnung der Elemente der Matrix  $R$  eine  $\alpha_2 - L$ -Folge.<sup>1)</sup>

Wir sehen, dass es gleichzeitig möglich ist, praktisch eine grössenordnungsmässig extremale Basis und eine genügend stabile Berechnung zu erhalten.

Wir führen ein Beispiel an. Es sei die Aufgabe  $Ay = f$  in der Form

$$(4) \quad -((1+x)y)' = 1, \quad y(0) = y(1) = 0$$

und die Aufgabe  $A^*y = f$

$$(5) \quad -y'' = 1, \quad y(0) = y(1) = 0$$

gegeben.

Betrachten wir den numerischen Rechenprozess der Berechnung der Elemente der Matrix  $R$  für die Aufgabe (4) mit den Koordinatenfunktionen

$$(6) \quad y_i^{[1]}(x) = x(1-x)x^{i-1}, \quad i = 1, 2, \dots$$

und die Berechnung mit den Koordinatenfunktionen

$$(7) \quad y_i^{[2]}(x) = \sin i\pi x, \quad i = 1, 2, \dots$$

Die Koordinatenfunktionen (7) erfüllen die Voraussetzungen des angeführten Satzes, da sie Eigenfunktionen der Gleichung (5) sind.

In Tab. I sind die Diagonalelemente der Matrix  $R \equiv \{r_{ij}\}$  bei den Koordinaten (6) angeführt. (Gerechnet auf dem Rechnautomaten URAL I.)

<sup>1)</sup> Bei der Berechnung in Gleitkomma können wir von der Normalisierung der Funktion  $y_j$  absehen.

Tabelle 1  
 Diagonalelemente der Matrix  $R$  für Koordinatenfunktionen (6)

$N$	2	3	4	5	6	7
0,999999998	0,999999998	0,999999912	0,999991178	1,001843920	—	4,83093262
1,000000002	1,000000002	1,000000024	1,000258460	0,985519410		10,0636598
	0,999999986	0,999999524	0,999641418	1,06201172		— 20,6015626
		1,000000024	0,999961854	0,952880860		15,6708986
			0,999952316	0,986938476		0,808593750
				1,00396728		1,83593748
						0,751953126

In Tab. 2 sind die Diagonalelemente der Matrix  $R$  bei den Koordinatenfunktionen (7) angeführt.

Tabelle 2  
 Diagonalelemente der Matrix  $R$  für Koordinatenfunktionen (7)

$N$	6	10	14	25
0,999999998	1,000000000	0,999999990	0,999999956	
0,999999998	0,999999998	0,999999992	0,999999964	
0,999999998	1,000000000	0,999999996	0,999999976	
0,999999996	0,999999982	0,999999974	0,999999840	
0,999999998	0,999999986	0,999999974	0,999999904	
0,999999992	0,999999982	0,999999982	0,999999886	
	0,999999992	0,999999988	0,999999920	
	0,999999992	0,999999986	0,999999924	
	0,999999996	0,999999992	0,999999942	
	0,999999998	0,999999992	0,999999962	
		0,999999988	0,999999958	
		0,999999986	0,999999956	
		0,999999994	0,999999970	
		0,999999992	0,999999970	
			0,999999966	
			0,999999968	
			0,999999968	
			0,999999980	
			0,999999978	
			0,999999982	
			0,999999972	
			0,999999978	
			0,999999982	
			0,999999978	
			0,999999982	

Auf Abb. 1 sind im logarithmischen Massstab die Grössen  $r_{11} - 1$ ,  $r_{44} - 1$ ,  $r_{66} - 1$ ,  $r_{88} - 1$  in Abhängigkeit von  $N$  angeführt. Dem  $\alpha_2 - L$ -Prozess entspricht die in der Abbildung angedeutete Richtung.

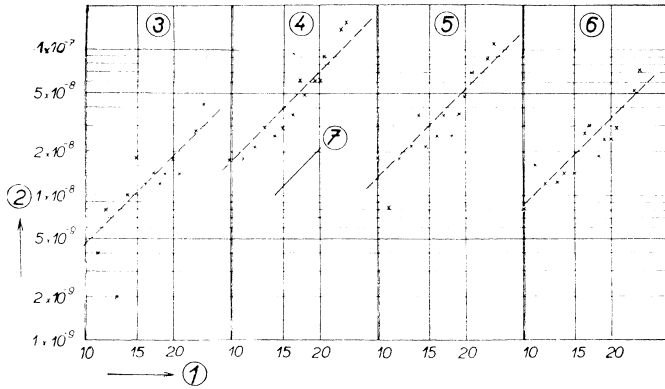


Abb. 1. 1. Anzahl der Gleichungen (Werte von  $N$ )  
 2. Grösse des Fehlers  
 3.  $r_{11} - 1$   
 4.  $r_{44} - 1$   
 5.  $r_{66} - 1$   
 6.  $r_{88} - 1$   
 7. Theoretische Richtung

#### Literatur

- [1] И. Бабушка, С. Л. Соколов: Оптимизация численных методов. Apl. mat. 10 (1965).  
 [2] E. Vitásek: Stability of Numerical Processes. Apl. mat. 10 (1965).

Ivo Babuška, Matematický ústav ČSAV, Žitná 25, Praha 1, ČSSR.