

# Aplikace matematiky

---

Josef Kolomý

Новые методы решения линейных функциональных уравнений

*Aplikace matematiky*, Vol. 10 (1965), No. 3, 246--248

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/102958>

## Terms of use:

© Institute of Mathematics AS CR, 1965

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

НОВЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ  
ЛИНЕЙНЫХ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

ЙОСЕФ КОЛОМЫ (JOSEF KOLOMÝ)

(к теме d)

1. В работах [1], [2] рассмотрены итерационные методы решения функционального уравнения

$$(1) \quad Ax = f,$$

где  $A$  — линейный ограниченный оператор в действительном или комплексном гильбертовом пространстве  $H$ ,  $f \in H$ . Идея этих методов заключается в том, что последовательные приближения вычисляются по формуле

$$(2) \quad x_{n+1} = Pf + \beta_n(I - PA)x_n, \quad (n = 0, 1, 2, \dots),$$

где  $P$  — линейный ограниченный оператор в  $H$  такой, что  $A$  перестановочен с  $P$ . Коэффициенты  $\beta_n$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ) определяются так, чтобы выполнялось одно из следующих условий

$$(3) \quad \|f - \beta_n Ax_n\|^2 = \text{Min},$$

$$(4) \quad \|f - Ax_{n+1}\|^2 = \text{Min}.$$

Из (3), (4) вытекает соответственно

$$(5) \quad \beta_n = \frac{\text{Re}(f, Ax_n)}{\|Ax_n\|^2},$$

$$(6) \quad \beta_n = \frac{\text{Re}(Lf, LAx_n)}{\|LAx_n\|^2}, \quad L = I - PA.$$

Имеет место следующая теорема:

**Теорема 1** ([1], [2]). Пусть  $A, P$  — линейные ограниченные перестановочные операторы в  $H$ , и  $P$  таков, что  $P^{-1}$  существует в  $H$ , и выполнено условие  $\|I - PA\| = q < 1$ . Тогда уравнение (1) имеет единственное решение  $x^*$  в  $H$ .

Последовательности  $\{x_n\}$ ,  $\{\tilde{x}_n\}$ , определенные равенствами (2), (5); (2), (6), сходятся к  $x^*$  по норме  $H$ , и имеют место оценки

$$\begin{aligned} \|x^* - x_n\| &\leq kq^n \|f - Ax_0\|, \\ \|x^* - \tilde{x}_n\| &\leq kq^n \|f - A\tilde{x}_0\|, \\ \|x^* - x_n\| &\leq kq \left\{ \|f\|^2 - \frac{[\operatorname{Re}(f, Ax_{n-1})]^2}{\|Ax_{n-1}\|^2} \right\}^{\frac{1}{2}}, \\ \|x^* - \tilde{x}_n\| &\leq kq \left\{ \|Lf\|^2 - \frac{[\operatorname{Re}(Lf, LA\tilde{x}_{n-1})]^2}{\|LA\tilde{x}_{n-1}\|^2} \right\}^{\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

где  $k = \|A^{-1}\| \leq \|P\|/(1 - q)$ ,  $x_0, \tilde{x}_0 \in H$ .

Пусть  $A = I - \lambda K$ , где  $K$  — линейный ограниченный оператор в  $H$ ,  $\lambda$  — в общем, комплексный параметер.

**Теорема 2.** Пусть выполнено одно из следующих условий:

- 1)  $P = I$ ,  $\|\lambda K\| < 1$ .
- 2)  $P = \vartheta I$ ,  $\lambda$  — действительный параметр,  $K$  — симметрический,  $(\lambda Kx, x) \leq 0$  для всех  $x \in H$ ,  $0 < \vartheta < 1/(1 + \|\lambda K\|)$ .
- 3)  $P = \vartheta I$ ,  $\operatorname{Re}(Ax, x) \geq m\|x\|^2$  для всех  $x \in H$ , ( $m > 0$ ) и  $0 < \vartheta < 2m/\|A\|^2$ .
- 4)  $P = \vartheta^2(I - \bar{\lambda}K^*)$ , где  $\bar{\lambda}$  — сопряженное число с  $\lambda$ ,  $K^*$  — сопряженный оператор с  $K$ ,  $K$  — нормальный оператор;  $\|Ax\| \geq k\|x\|$ ,  $k > 0$ ,  $0 < \vartheta < k\sqrt{2}/(1 + \|\lambda K\|)^2$ .
- 5)  $P = I + J$ , где  $J$  — линейный ограниченный оператор в  $H$ , перестановочный с  $K$  и такой, что  $\|\lambda G - J\| < 1/(1 + \|\lambda K\|)$ , где  $G$  — резольвентный оператор для оператора  $K$ .

Тогда уравнение (1) имеет единственное решение  $x^*$  в  $H$ . Последовательности  $\{x_n\}$ ,  $\{\tilde{x}_n\}$ , определенные равенствами (2), (5); (2), (6), сходятся к  $x^*$  по норме  $H$  с быстротой геометрической прогрессии.

Для практического вычисления надо знать оценку числа  $q$ . Число  $q$  можно заменить числом  $q'$  ( $q \leq q' < 1$ ), так что в случаях: 1)  $q' = \|\lambda K\|$ , 2)  $q' = 1 - \vartheta$ , 3) если  $\vartheta = m/\|A\|^2$  то  $q' = \{1 - (m/\|A\|^2)\}^{\frac{1}{2}}$ , 5)  $q' = \|\lambda G - J\| \cdot \|I - \lambda K\|$ .

2. Пусть операторы  $A, P$  удовлетворяют условиям теоремы 1. Пусть, далее,  $A$  — симметрический оператор в  $H$ . Обозначим через  $x^*$  единственное в  $H$  решение уравнения (1). Действительные коэффициенты  $\beta_n$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ) определим так, чтобы выполнялось одно из следующих условий

$$\begin{aligned} \|x^* - \beta_n x_n\|^2 &= \operatorname{Min}, \\ \|x^* - x_{n+1}\|^2 &= \operatorname{Min}. \end{aligned}$$

Приравнивая нулю производные

$$\frac{d}{d\beta_n} \|x^* - \beta_n x_n\|^2, \quad \frac{d}{d\beta_n} \|x^* - x_{n+1}\|^2,$$

находим соответственно

$$(7) \quad \beta_n = \frac{\operatorname{Re}(f, Px_n)}{\operatorname{Re}(x_n, PAx_n)},$$

$$(8) \quad \beta_n = \frac{\operatorname{Re}(Lf, PLx_n)}{\operatorname{Re}(Lx_n, PLAx_n)}.$$

Формулы (2), (7); (2), (8) определяют итерационные процессы, обеспечивающие на каждом шаге наибольшее возможное уменьшение норм ошибок  $\|x^* - x_n\|$ ,  $\|x^* - x_{n+1}\|$ . В случае симметрического оператора норма ошибки  $\|x^* - x_n\|$  на каждом шаге при использовании формул (2), (7); (2), (8) меньше, чем норма ошибки  $\|x^* - x_n\|$  при использовании формул (2), (5) или (2), (6). Если выбрать оператор  $P$  подходящим образом, то формулы (7), (8) более просты, чем (5), (6) соответственно. Методы, определенные формулами (2), (5); (2), (7) являются более простыми, чем методы типа наискорейшего спуска [3], [4], [5]. Вместе с методами (2), (6); (2), (8) дают, в сущности, ускорения метода последовательных приближений.

**Теорема 3.** Пусть выполнены условия теоремы 1. Пусть  $A$  — симметрический оператор в  $H$ . Тогда уравнение (1) имеет единственное решение  $x^*$  в  $H$ . Последовательности  $\{x_n\}$ ,  $\{\tilde{x}_n\}$ , определенные равенствами (2), (7); (2), (8) сходятся по норме  $H$  к решению  $x^*$  с быстротой геометрической прогрессии  $\{q^n\}$ .

Имеет место теорема, аналогичная теореме 2 для методов (2), (7); (2), (8). В случаях 1), 5) надо только дополнить предположение:  $K$  — симметрический, и в случае 3):  $A$  — симметрический оператор.

#### Литература

- [1] J. Kolomý: O konvergenci k užití iteračních metod. Čas. pěst. mat. 86 (1961), 148—177.
- [2] J. Kolomý: K metodě podobné iterace. Čas. pěst. mat. 86 (1961), 308—313.
- [3] Л. В. Канторович: Функциональный анализ и прикладная математика. Усп. мат. наук 6 (1948), 89—185.
- [4] М. А. Красносельский-С. Г. Крейн: Итерационный процесс с минимальными невязками. Мат. сб. 31 (1952), 315—334.
- [5] В. М. Фридман: О сходимости методов типа наискорейшего спуска. Усп. мат. наук 17 (1962), 201—204.

Josef Kolomý, Matematický ústav university Karlovy, Sokolovská 83, Praha 8, ČSSR.