

Aplikace matematiky

Věra Maršíková

Über die Lösung einer linearen Operatorgleichung mittels der Iterationsmethode

Aplikace matematiky, Vol. 10 (1965), No. 3, 272–278

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/102962>

Terms of use:

© Institute of Mathematics AS CR, 1965

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

ÜBER DIE LÖSUNG EINER LINEAREN OPERATORENGLEICHUNG
MITTELS DER ITERATIONSMETHODE

VĚRA MARŠÍKOVÁ

(zum Thema b)

Im Hilbertschen Raum H ist die lineare Operatorengleichung

$$(1) \quad Dy = f$$

gegeben. D ist ein symmetrischer positiv definitiver Operator, $y, f \in H$. Das skalare Produkt zweier Elemente y, v aus H bezeichnen wir mit (y, v) . Gleichung (1) wollen wir mittels der Methode der konjugierten Gradienten und der Methode des stärksten Abstiegs lösen. In beiden Methoden wählen wir die Anfangsnäherung $y^{(0)} \in H$ beliebig und durch den Iterationsprozess berechnen wir die weiteren Näherungen

$$y^{(m)} \quad (m = 1, 2, \dots).$$

Die Methode der konjugierten Gradienten ist durch die folgenden Formeln definiert:

$$(2) \quad \begin{aligned} r^{(0)} &= f - Dy^{(0)}, \\ p^{(0)} &= r^{(0)}, \end{aligned}$$

$$(3a) \quad a^{(m)} = \frac{(r^{(m)}, p^{(m)})}{(p^{(m)}, Dp^{(m)})},$$

$$(4) \quad y^{(m+1)} = y^{(m)} + a^{(m)}p^{(m)},$$

$$(5a) \quad r^{(m+1)} = r^{(m)} - a^{(m)}Dp^{(m)},$$

$$(6) \quad b^{(m)} = -\frac{(r^{(m+1)}, Dp^{(m)})}{(p^{(m)}, Dp^{(m)})},$$

$$(7) \quad p^{(m+1)} = r^{(m+1)} + b^{(m)}p^{(m)}, \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

Es ist leicht zu zeigen, dass die Formel (5a) mit der Formel

$$(5b) \quad r^{(m+1)} = f - Dy^{(m+1)}$$

äquivalent ist; da die Vektoren $p^{(m)}$ D -orthogonal sind, gilt auch

$$(3b) \quad \alpha^{(m)} = \frac{(r^{(0)}, p^{(m)})}{(p^{(m)}, Dp^{(m)})}.$$

Die Methode des stärksten Abstiegs benützt die Formeln (2), (3a), (4), (5a) oder (2), (3a), (4), (5b) und für $p^{(m)}$ wird $r^{(m)}$ identisch für alle m gesetzt.

Die sukzessiven Approximationen $y^{(m)}$ konvergieren zur Lösung der Gleichung (1) und für die Fehlerabschätzung gilt die Formel

$$(8) \quad \|y^{(m)} - y\| = C \cdot \left(\frac{M_2 - M_1}{M_2 + M_1} \right)^m,$$

wobei M_1, M_2 die Grenzen des Operators D sind, $0 < M_1 < M_2$. Die Methode der konjugierten Gradienten konvergiert grundsätzlich schneller.

Mit den angeführten Methoden wollen wir im Raume $L_2\langle 0, 1 \rangle$ die Integralgleichung

$$(9) \quad y(x) - \lambda \int_0^1 \mathcal{K}(x, s) y(s) ds = f(x)$$

lösen. Der Kern der Gleichung ist eine Greensche Funktion folgender Form:

$$\mathcal{K}(x, s) = \begin{cases} x(1-s), & 0 \leq x \leq s \leq 1, \\ s(1-x), & 0 \leq s \leq x \leq 1, \end{cases}$$

$$f(x) = x^2,$$

λ ist ein reeller Parameter. Der Einfachheit halber wollen wir die Bezeichnung

$$\int_0^1 \mathcal{K}(x, s) y(s) ds = Ky$$

einführen, so dass wir die Gleichung (9) nun in der Form

$$(9,1) \quad (I - \lambda K) y = f$$

schreiben können (I ist der identische Operator). Ihre Lösung bezeichnen wir mit y^* . Offensichtlich ist y^* von dem Parameter λ abhängig. Für $\lambda < \pi^2$ ist der Operator $I - \lambda K$ positiv definit und wir können die oben angeführten Algorithmen benützen.

Die entsprechenden numerischen Berechnungen wurden auf dem Rechenautomaten Ural 2 in Gleitkomma durchgeführt. Die Mantissa hat 8 Stellen, die Grenzen des Zehnerexponenten sind ± 19 .

Für die Bearbeitung auf dem Automaten wurde folgende Diskretisierung vorgenommen: Das Intervall $\langle 0, 1 \rangle$ haben wir in n Teile geteilt.

Es wird bezeichnet

$$h = \frac{1}{n}, \quad x_i = i \cdot h, \quad s_k = k \cdot h,$$

$$y(x_i) = y_i, \quad f(x_i) = f_i, \quad \mathcal{K}(x_i, s_k) = K_{ik}, \quad \text{usw.}$$

Die Gleichung (9) ersetzen wir durch ein lineares Gleichungssystem

$$(10) \quad y_i - \lambda \sum_{k=0}^n A_{ik} K_{ik} y_k = f_i, \quad (i = 0, 1, \dots, n).$$

A_{ik} sind Konstanten, die durch die Ersetzung des Integrals durch eine endliche Summe nach der Simpsonregel entstanden sind, und zwar folgenderweise: Für gerade i im Intervall $\langle 0, 1 \rangle$, für ungerade i im Intervall $\langle h, 1 - h \rangle$. Im Intervall $\langle 0, h \rangle$ und im Intervall $\langle 1 - h, 1 \rangle$ wurde die Trapezregel benützt, denn die erste Ableitung der Funktion $\mathcal{K}(x, s)$ ist auf der Diagonale nicht stetig.

Das skalare Produkt definieren wir durch die Formel

$$(y, v) = \sum_{k=0}^n A_k y_k v_k,$$

A_k sind wiederum Konstanten der numerischen Integration nach der Simpsonregel im Intervall $\langle 0, 1 \rangle$. Die Norm definieren wir wie üblich $\|v\| = \sqrt{(v, v)}$.

Dieses Ersetzen des Operators K zerstört seine Symetrie nur in den Punkten

$$A_{2j+1, k} K_{2j+1, k} \quad \text{für } k = 1, n - 1 \quad \text{und } j = 1, 2, \dots, \frac{n}{2} - 2$$

und in den Punkten

$$A_{i, 2j+1} K_{i, 2j+1} \quad \text{für } i = 1, n - 1 \quad \text{und } j = 1, 2, \dots, \frac{n}{2} - 2,$$

$$A_{ik} K_{ik} = A_{ki} K_{ki} = 0 \quad \text{für } k = 0, n, \quad i = 0, 1, \dots, n.$$

Für grosse n ist diese Symmetriestörung nicht gross und lässt sich praktisch vernachlässigen.

Das Gleichungssystem (10) können wir auch symbolisch derart schreiben:

$$Dy = f,$$

wobei

$$y = (y_0, y_1, \dots, y_n), \quad f = (f_0, f_1, \dots, f_n)$$

Vektoren sind und die Matrix D durch die Elemente

$$\delta_{ik} - \lambda \cdot A_{ik} \cdot K_{ik}$$

gebildet wird; δ_{ik} ist das Kronecker'sche Symbol. Zur Berechnung der Lösung des betrachteten Gleichungssystems benützen wir die Formeln (2)–(7) derart, dass wir die Symbole $y^{(m)}$, $r^{(m)}$, $p^{(m)}$ als Vektoren und $a^{(m)}$, $b^{(m)}$ als Konstanten betrachten.

Zwecks leichterer Orientierung ordnen wir den einzelnen Varianten folgende Bezeichnungen zu:

Die Methode des stärksten Abstiegs

- Berechnung von $r^{(m)}$ durch Rekursion V1
- $r^{(m)}$ nach Definition V2

Methode der konjugierten Gradienten

- Berechnung von $r^{(m)}$ durch Rekursion V3
- $r^{(m)}$ nach Definition V4

Methode der konjugierten Gradienten mit Ausnützung der Orthogonalität der Vektoren $p^{(m)}$

- Berechnung von $r^{(m)}$ durch Rekursion V5
- $r^{(m)}$ nach Definition V6

Für die einzelnen Varianten wurden also folgende Formeln benutzt: (siehe Tabelle 1).

Tabelle 1

V1	(2), (3a), (4), (5a)
V2	(2), (3a), (4), (5b)
V3	(2), (3a), (4), (5a), (6), (7)
V4	(2), (3a), (4), (5b), (6), (7)
V5	(2), (3b), (4), (5a), (6), (7)
V6	(2), (3b), (4), (5b), (6), (7)

Die Anfangsnäherung wurde bei allen Varianten gleich gewählt und zwar $y^{(0)} = f$. Das Iterationsverfahren wurde fortgesetzt, solange $\|r^{(m)}\|^2 \geq 10^{-19}$ war. Für $\|r^{(m)}\|^2 < 10^{-19}$ war auch $(p^{(m)}, Dp^{(m)}) < 10^{-19}$, d. h. „Maschinelle Null“ und der Automat blieb mit der Indikation „Division durch Null“ stehen.

Für jeden Schritt wurde die Norm $\|y^{(m)} - y^*\|$ berechnet, wobei y^* die genaue Lösung der ursprünglichen Integralgleichung bezeichnet.

Für die Werte von $\lambda = 1, -1$ endete die Rechnung fast unabhängig von n nach 6 resp. 4 Iterationsschritten für die Variaten V1,V2 resp. V3,V4, für $\lambda = -10$ erst nach 20 bis 9 Iterationsschritten. Die Anzahl der Iterationen wurde mit wachsendem n kleiner und war ungefähr um 5 grösser für die Methode des stärksten Abstiegs als für die Methode der konjugierten Gradienten. Speicherkapazität und Rechenzeiten für eine Iteration sind für die einzelnen Varianten verschieden. Die Berechnung eines

Iterationsschritten für die Variante V2, resp. V4, resp. V6 dauert ungefähr doppelt so lange als für die Varianten V1, resp. V3, resp. V5.

Tabelle 2

	Speicher- kapazität	Rechenzeit	Schrittzahl für	
			$\lambda = 1, -1$	$\lambda = -10$
V1	$2n$	$3n^2 + 8n$	6—5	20—13
V2		$6n^2 + 7n$		
V3	$3n$	$3n^2 + 15n$	5—4	15—9
V4		$6n^2 + 14n$		
V5	$4n$	$3n^2 + 15n$	—	—
V6		$6n^2 + 14n$		

Wenn wir voraussetzen, dass die A_{ik}, K_{ik} in jedem Schritt durch ein Unterprogramm berechnet werden, so braucht das Rechenfeld $2n$, resp. $3n$, resp. $4n$ Speicherzellen für die Varianten V1 und V2 resp. V3 und V4, resp. V5 und V6. Diese Angaben sind in der Tabelle 2 übersichtlich angeführt.

Die Ergebnisse der Varianten V1—V4 sind praktisch gleich, so dass man sagen kann, dass es nicht vorteilhaft ist, den (Rest-)Vektor $r^{(m)}$ aus der Definition, d. i. nach

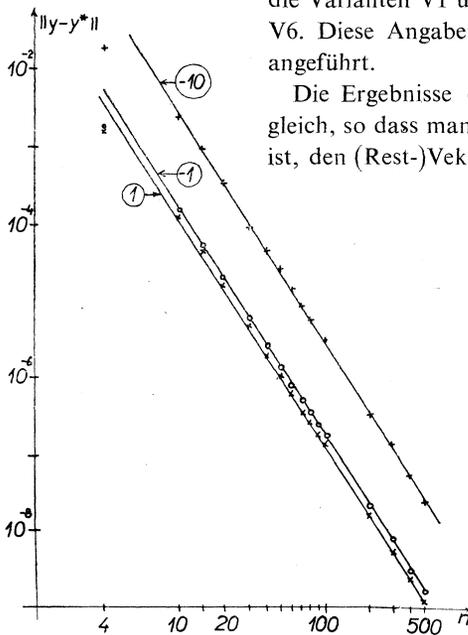


Abb. 1.

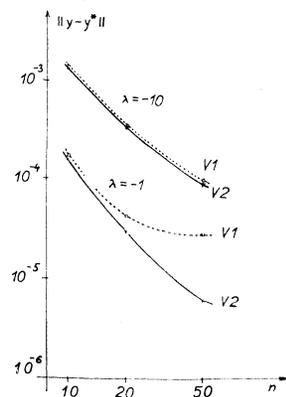


Abb. 2.

Formel (5b) zu berechnen, weil die Berechnung eines Schrittes für die Variante V2 und V4 doppelt solange dauert als für die Varianten V1 und V3. Ob wir die Variante V1 oder V3, d.h. die Methode des stärksten Abstiegs oder die Methode der konjugierten Gradienten anwenden sollen, darüber entscheidet, ob wir Speicherplatz oder Rechenzeit einsparen wollen. Ist der Konvergenzkoeffizient $(M_2 - M_1)/(M_2 + M_1)$, wo M_1, M_2 die untere bzw. obere Grenze des Operators D sind, nahe Eins, lohnt es sich, die Methode der konjugierten Gradienten (Variante V3) zu benutzen, denn hier ist der Unterschied in der Schrittzahl zwischen den Varianten V1 und V3 spürbar. Auf Abb. 1 ist die Abhängigkeit des Fehlers $\|y - y^*\|$ von der Intervallteilung (n) für die Werte $\lambda = 1, -1, -10$ und die Varianten V1 - V4 abgebildet. Es zeigt sich, dass für $n \leq 500$ sich keine Rundungsfehler bemerkbar gemacht haben und die Berechnung absolut stabil blieb. Die berechnete Lösung für $n = 500$ ist in Übereinstimmung mit der Lösung y^* der Integralgleichung in allen 8 Stellen für $\lambda = 1, -1$; für $\lambda = -10$ ist der grösste Unterschied 3 Einer der letzten gültigen Stelle.

Dieselbe Integralgleichung wurde auf gleiche Weise auch auf dem Automaten Ural 1 in Festkomma mit 9 Stellen berechnet. Die Stabilität wurde schon für $n = 80$ gestört, wo die Rundungsfehler einen grossen Einfluss zeigten, u. zw. einen grösseren auf die Berechnung des Restes $r^{(m)}$ mittels Rekursion als mittels Definition (siehe Abb. 2). Der Unterschied war aber nicht so gross, dass es sich lohnen würde, den Rest mittels Definition zu berechnen. Die erzielte Genauigkeit der Ergebnisse war auch kleiner als bei der Berechnung in Gleitkomma.

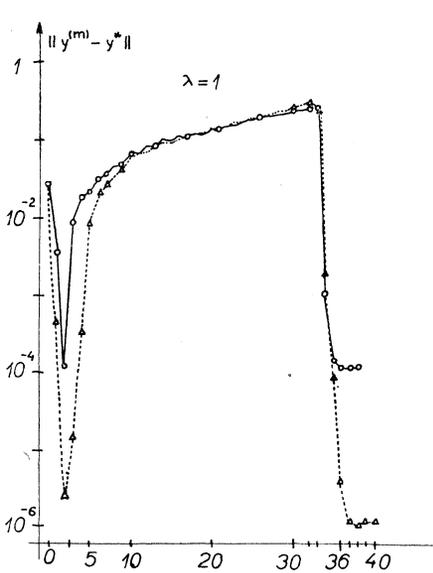


Abb. 3.

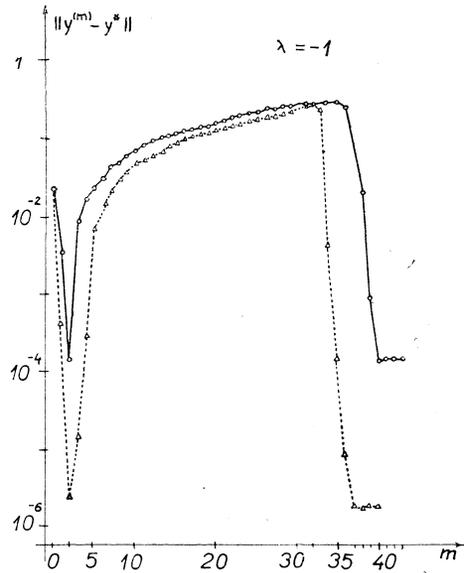


Abb. 4.

Es bleibt uns noch übrig, die Varianten V5 und V6 zu betrachten, welche die D -Orthogonalität der Vektoren $p^{(m)}$ ausnützen. Die Berechnung nach beiden diesen Varianten ist unstabil für alle betrachteten n und λ , wie aus den Abb. 3–5 zu sehen ist. Auf der X-Achse ist die Reihenfolge der einzelnen Iterationen angeführt, auf der Y-Achse der Fehler $\|y^{(m)} - y^*\|$, und zwar voll für $n = 10$, punktiert für $n = 100$.

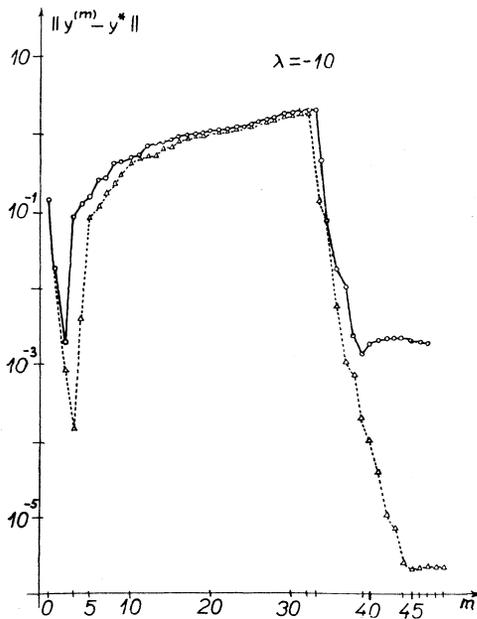


Abb. 5.

Wir sehen, dass in den ersten zwei Schritten die Iterationen konvergieren und mit dem dritten Schritt sich die Ungenauigkeit praktisch linear mit der Anzahl der Schritte zu vergrößern beginnt. Wenn wir von der Variante V5 resp. V6 zu der Variante V3 resp. V4 übergehen, d.h. wenn wir die D -Orthogonalität nicht ausnützen, erhalten wir binnen weniger Schritte befriedigende Ergebnisse – der abfallende Kurventeil auf den Abbildungen. Die Rundungsfehler zeigten einen grösseren Einfluss auf die Berechnung des Skalarprodukts $(r^{(0)}, p^{(m)})$ als auf die Berechnung des Skalarprodukts $(r^{(m)}, p^{(m)})$, weil die Norm der Vektoren $r^{(m)}$ und $p^{(m)}$ mit wachsendem m sich schneller als 10^{-m} vermindert.

Die Varianten V5, resp. V6, welche die Orthogonalität der Vektoren $p^{(m)}$

ausnützen, sind also für Rechenautomaten vollkommen ungeeignet.

Zusammenfassend kann man sagen, dass für Rechenautomaten die Varianten V1 und V3 vom Standpunkt der Speicherkapazität und Rechenzeit am besten eignen. Die Genauigkeit der Rechnung ist dieselbe wie bei den Varianten V2 und V4.

Literaturverzeichnis

- [1] Hayes: Appl. math. series 39, 1954, 71–104.
 [2] Канторович-Акилов: Функциональный анализ в норм. простр. Физматгиз, Москва, 1959, 541–554.

Věra Maršíková, Ústav výpočtové techniky ČSAV a ČVUT, Horská 3, Praha 2, ČSSR.