Aplikace matematiky

Věra Maršíková

Über neue iterative Methoden im Eigenwertproblem eines beschränkten linearen Operators

Aplikace matematiky, Vol. 10 (1965), No. 3, 279--282

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/102963

ÜBER NEUE ITERATIVE METHODEN IM EIGENWERTPROBLEM EINES BESCHRÄNKTEN LINEAREN OPERATORS

VĚRA MARŠÍKOVÁ

(zum Thema d)

Wir vergleichen den Verlauf der Berechnung des kleinsten Eigenwerts eines linearen Operators bei drei Methoden. Es sind die folgenden Methoden: Die Methode des stärksten Abstiegs (kurz MSA), Birger's Methode (B) und Kolmý's Methode (K). Birger hat in seinem Buch [1] eine neue Methode ohne Beweis angeführt. J. Kolomý hat einen Beweis und eine Abänderung dieser Methode in [2], [3] gegeben. Alle Methoden sind für einen symmetrischen positiv definiten Operator definiert. Die Iterationsprozesse sind diese:

Methode des stärksten Abstiegs:

$$\lambda^{(m)} = \frac{\left(y^{(m)}, y^{(m)}\right)}{\left(y^{(m)}, Ky^{(m)}\right)},$$

$$r^{(m)} = Ky^{(m)} - \frac{1}{\lambda^{(m)}}\, y^{(m)},$$

$$a^{(m)} = \frac{\left(r^{(m)}, r^{(m)}\right)}{\frac{1}{\lambda^{(m)}}\left(r^{(m)}, r^{(m)}\right) - \left(r^{(m)}, Kr^{(m)}\right)},$$

$$y^{(m+1)} = y^{(m)} + a^{(m)} r^{(m)},$$

$$(m = 0, 1, \ldots).$$

Birger's Methode:

$$\lambda^{(m)} = \frac{\left(y^{(m)}, Ky^{(m)}\right)}{\left(Ky^{(m)}, Ky^{(m)}\right)},$$

$$y^{(m+1)} = \lambda^{(m)} K y^{(m)},$$

Kolomý's Methode:

$$\lambda^{(m)} = \frac{\left(y^{(m)}, y^{(m)}\right)}{\left(y^{(m)}, Ky^{(m)}\right)},$$

$$y^{(m+1)} = \lambda^{(m)} K y^{(m)},$$

Die Werte $\lambda^{(m)}$ konvergieren monoton zum kleinsten Eigenwert λ des Operators K, die $y^{(m)}$ konvergieren monoton zu einem Eigenvektor, der zu λ gehört.

Der Operator K wurde durch das Gleichungssystem

$$y_i = \lambda \sum_{k=0}^{n} A_k K_{ik} y_k, \quad i = 0, 1, \ldots, n$$

gegeben. Das System ist durch die Diskretisierung der Integralgleichung

$$y(x) = \lambda \int_0^1 K(x, s)\, y(s)\, \mathrm{d}s$$

in den Punkten $x_i = i/n$ entstanden. A_k sind die Koeffizienten der numerischen Integration. Das Skalarprodukt wird durch die Formel

$$(y, u) = \sum_{k=0}^{n} A_k y_k u_k$$

definiert.

Bei Verwendung von Birger's Methode und Kolomý's Methode ist die Rechnung einfacher und der Anspruch auf Maschinenzeit ist halb so gross im Vergleich mit der Methode des stärksten Abstiegs. Birger's und Kolomý's Methode geben eben so gute Resultate wie die Methode des stärksten Abstiegs.

Die Speicherkapazität und die Anzahl der Multiplikation sind in der Tabelle 1 in der Zeile (1) resp. (2) angeführt.

Tabelle 1

	B, K	MSA
(1)	$2n$	$3n$
(2)	$3n^2 + 7n$	$6n^2 + 17n$

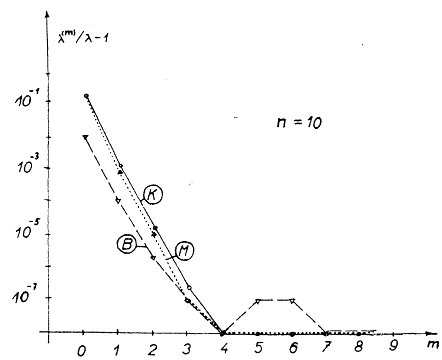

Abb. 1.

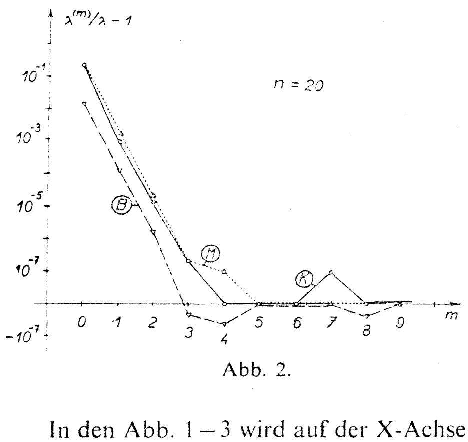

Abb. 2.

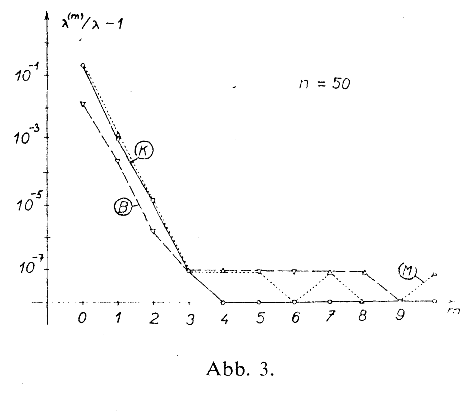

Abb. 3.

In den Abb. 1 – 3 wird auf der X-Achse der Iterationsindex und auf der Y-Achse der dazugehörige Quotient der Iteration $\lambda^{(m)}$ und des Endwertes λ, um 1 verkleinert abgebildet und zwar auf Abb. 1 für ein System von 10 Gleichungen, auf Abb. 2 für

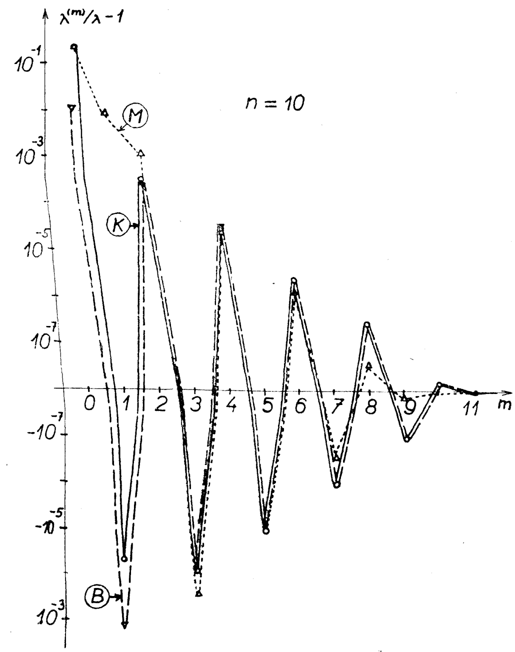

Abb. 4.

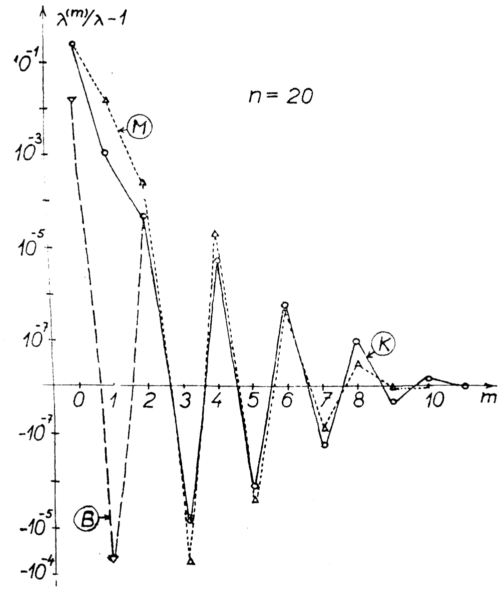

Abb. 5.

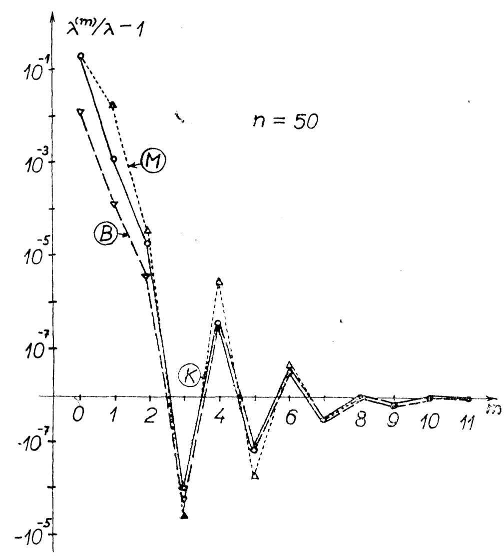

Abb. 6.

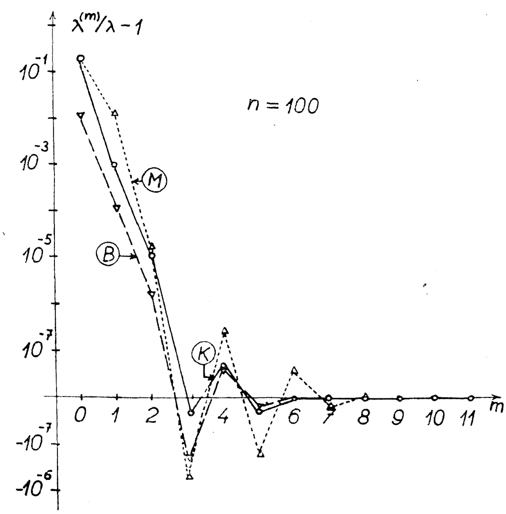

Abb. 7.

ein System von 20 Gleichungen, auf Abb. 3 für ein System von 50 Gleichungen. Die numerische Integration wurde nach der Trapezregel durchgeführt, der Operator K war symmetrisch. Die $\lambda^{(m)}$ konvergieren zu λ fast monoton. Die Differenzen von 1 sind nur Einer der letzten gültigen Stelle.

Falls die Bedingung der Symmetrie des Matrixoperators nicht erfüllt ist, z. B. beim Ersetzen des Integrals durch eine Summe nach der Simpsonregel, wird die Monotonie der Konvergenz beschädigt, wie wir aus Abb. 4–7 sehen. Die Resultate bei Birger's und Kolomý's Methode sind trotzdem befriedigend. Es gibt Verallgemeinerungen beider dieser Methoden für beschränkte Operatoren im Banachschen Raum, die einen dominanten Eigenwert besitzen (I. Marek, [4]).

Literaturverzeichnis

[1] *И. А. Биргер:* Некоторые математические методы решения инженерных задач, Оборонгиз, Москва 1956, стр. 72—80.

[2] *J. Kolomý:* On convergence of the iterative methods, Comm. Math. Univ. Carol. 1, 3 (1960), 18—24.

[3] *J. Kolomý:* On the solution of homogeneous functional equations in Hilbert space, Comm. Math. Univ. Carol. 3, 4 (1962), 36—47.

[4] *I. Marek:* On iterations of bounded linear operator and Kelloggs' iterations in not self-adjoint eigenvalue problems, Czech. Math. Journ. 12, 1962, 4, 536—554.

[5] *Канторович:* Функциональный анализ и прикладная математика, Усп. мат. наук, 111, вып. 6, 1948, 89—185.

Věra Maršíková, Ústav výpočtové techniky ČSAV a ČVUT, Horská 3, Praha 2, ČSSR.