

# Aplikace matematiky

---

Aleksander Andreevich Samarskij

О точности метода сеток для задачи Дирихле в произвольной области

*Aplikace matematiky*, Vol. 10 (1965), No. 3, 293--296

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/102966>

## Terms of use:

© Institute of Mathematics AS CR, 1965

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

О ТОЧНОСТИ МЕТОДА СЕТОК ДЛЯ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ  
В ПРОИЗВОЛЬНОЙ ОБЛАСТИ

А. А. САМАРСКИЙ (А. А. SAMARSKIJ)

(к теме с)

1. Рассмотрим в произвольной  $p$ -мерной области  $\Omega$  с границей  $\Gamma$  первую краевую задачу для эллиптического уравнения

$$(1) \quad Lu - q(x)u = -f(x), \quad L = \sum_{\alpha=1}^p L_{\alpha}, \quad L_{\alpha}u = \frac{\partial}{\partial x_{\alpha}} \left( k_{\alpha}(x) \frac{\partial u}{\partial x_{\alpha}} \right), \quad x \in \Omega,$$

$$(2) \quad u|_{\Gamma} = \mu(x), \quad x = (x_1, \dots, x_{\alpha}, \dots, x_p),$$

$$(3) \quad k_{\alpha}(x) \geq c_1 > 0, \quad q(x) \geq 0, \quad c_1 = \text{const}.$$

Задачу (1)–(3) или задачу I будем решать методом сеток, аппроксимируя каждый из операторов  $L_{\alpha}$  трёхточечной схемой  $A_{\alpha}$  второго порядка аппроксимации, а граничные значения будем брать точно, что возможно, если все граничные узлы  $\gamma_h$  сетки  $\omega_h$  принадлежат  $\Gamma$  и, следовательно, в случае произвольной области  $\Omega$  используется неравномерная вблизи  $\Gamma$  сетка  $\omega_h$ . В пограничных узлах  $\omega_h^*$  приходится писать схему на неравномерной сетке, имеющую первый локальный порядок аппроксимации. Тем не менее оказывается, что вклад  $z^*$ , который погрешность аппроксимации  $\psi^*$  схемы в пограничной зоне  $\omega_h^*$  вносит в погрешность  $z$  разностной схемы есть величина  $O(h^3)$ , где  $h$  – максимальное значение шагов сетки. Цель нашего сообщения – доказать это утверждение для разностных схем, аппроксимирующих задачу I на произвольной сетке, используя простейшее свойство (7) разностной функции Грина. Тот же результат может быть получен непосредственно при помощи принципа максимума.

Область  $\Omega$  предполагается такой, что ее пересечение с прямой  $\mathcal{L}_{\alpha}$ , параллельной оси  $Ox_{\alpha}$  и проходящей через любую точку  $x \in \Omega$ , состоит из конечного числа интервалов. Для упрощения редакции изложение проводится для случая, когда  $\mathcal{L}_{\alpha}$  пересекает  $\Gamma$  в двух точках.

2. Введем сетку  $\omega_h = \{x_i \in \Omega\}$  с границей  $\gamma_h = \{x_i^* \in \Gamma\}$ . Для этого рассмотрим основную решетку  $\{x_i\}$ , то-есть множество узлов  $x_i = (x_1^{(i_1)}, \dots, x_{\alpha}^{(i_{\alpha})}, \dots, x_p^{(i_p)})$ ,

$i_\alpha = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$  (начало координат внутри  $\Omega$ ) — точек пересечения семейств гиперплоскостей  $x_\alpha^{(i_\alpha)} = \text{const.}$ ,  $\alpha = 1, 2, \dots, p$ ,  $i_\alpha = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ,  $h_\alpha^{(i_\alpha)} = x_\alpha^{(i_\alpha)} - x_\alpha^{(i_\alpha - 1)}$  — шаг решетки. Если  $h_\alpha^{(i_\alpha)} = h_\alpha = \text{const.}$ , то решетка равномерна по каждому из  $x_\alpha$ . Сетка  $\omega_h$  состоит из узлов  $x_i$  решетки, попавших внутрь  $\Omega$ , а её граница  $\gamma_h$  — из узлов  $x_i^*$ , являющихся точками пересечения  $\Gamma$  с гиперплоскостями  $x_\alpha^{(i_\alpha)} = \text{const.}$

Проведем через узел  $x_i \in \omega_h$  прямую  $\mathcal{L}_\alpha$ , пересекающую  $\Gamma$  в точках  $x_{A_\alpha}^*$  (левая) и  $x_{B_\alpha}^*$  (правая). Множество узлов  $x_i \in \omega_h$ , лежащих на  $\mathcal{L}_\alpha$ , включая  $x_{A_\alpha}^* \in \gamma_h$  и  $x_{B_\alpha}^* \in \gamma_h$ , образует цепочку  $r_\alpha$ . Узлы  $x_{A_\alpha}^{*(+1_\alpha)} \in \omega_h$  и  $x_{B_\alpha}^{*(-1_\alpha)} \in \omega_h$ , соседние с  $x_{A_\alpha}^*$  и  $x_{B_\alpha}^*$  соответственно, назовем пограничными. Перебирая все цепочки  $r_\alpha$  данного направления  $\alpha$ , получим все внутренние узлы сетки  $\omega_h$  и множества  $\gamma_h^{z-}$  и  $\gamma_h^{z+}$  левых и правых граничных узлов. Обозначим  $\omega_h^{*(-\alpha)}$  и  $\omega_h^{*(+\alpha)}$  множество всех левых  $x_{A_\alpha}^{*(+1_\alpha)}$  и соответственно правых  $x_{B_\alpha}^{*(-1_\alpha)}$  пограничных узлов для данного  $\alpha$ ,  $\omega_h^{*(\alpha)} = \omega_h^{*(-\alpha)} \cup \omega_h^{*(+\alpha)}$ . Множество пограничных узлов сетки  $\omega_h$  для всех направлений  $\alpha$  обозначим  $\omega_h^* = \bigcup_{\alpha=1}^p \omega_h^{*(\alpha)}$  и положим  $\omega_h = \omega_h^* \cup \tilde{\omega}_h$ . Назовем  $\omega_h^*$  пограничной зоной,  $\tilde{\omega}_h$  — основной областью сетки  $\omega_h$ .

Нам понадобятся некоторые сокращенные обозначения. Следуя [1], будем писать  $y = y(x) = y_i$  — значение сеточной функции  $y(x_i)$  в узле  $x = x_i \in \omega_h$ . Введем скалярные произведения

$$(v, w) = \sum_{\omega_h} v(x) w(x) H, \quad (v, w)_{*(\mp z)} = \sum_{x \in \omega_h^{*(\mp z)}} v(x) w(x) H_\alpha,$$

где

$$H = \prod_{\alpha=1}^p h_\alpha, \quad H_\alpha = \prod_{\beta \neq \alpha} h_\beta, \quad h_\alpha = 0,5(h_{\alpha+} + h_{\alpha-}), \quad h_\alpha = h_\alpha^{(i_\alpha)}, \quad h_{\alpha+} = h_\alpha^{(i_\alpha + 1)}.$$

Пусть  $x_i^{(\pm 1_\alpha)} = x_{i'}$  — узел с координатами  $x_\beta^{i'_\beta}$ ,  $\beta = 1, 2, \dots, p$ ,  $i'_\beta = i_\beta$  при  $\beta \neq \alpha$ ,  $i'_\alpha = i_\alpha \pm 1$ ,  $y^{(\pm 1_\alpha)} = y(x_i^{(\pm 1_\alpha)})$ ,  $y_{\tilde{x}_\alpha} = (y - y^{(-1_\alpha)})/h_\alpha$ ,  $y_{x_\alpha} = (y^{(+1_\alpha)} - y)/h_{\alpha+}$ ,  $y_{\tilde{x}_\alpha} = (y^{(+1_\alpha)} - y)/h_{\alpha-}$ . На равномерной сетке  $h_{\alpha+} = h_\alpha = h_{\alpha-} = \text{const.}$  имеем  $y_{\tilde{x}_\alpha} = y_{x_\alpha}$ .

3. Пусть  $L_\alpha$  однородная разностная схема вида

$$(4) \quad L_\alpha y = (a_\alpha y_{\tilde{x}_\alpha})_{\tilde{x}_\alpha}, \quad a_\alpha \geq c_1 > 0,$$

которая аппроксимирует  $L_\alpha$  на равномерной сетке с точностью до  $O(h_\alpha^2)$ , а на неравномерной сетке —  $O(h_\alpha)$  (см. [1], [2]). Здесь  $a_\alpha$  некоторый функционал от  $k_\alpha$ ; в простейшем случае  $a_\alpha = k_\alpha^{(-0,5z)}$ , где  $k_\alpha^{(-0,5z)}$  — значение  $k_\alpha$  в середине интервала  $(x_\alpha^{(i_\alpha - 1)}, x_\alpha^{(i_\alpha)})$  цепочки  $r_\alpha$ .

Задаче I ставим в соответствие разностную схему

$$(II) \quad Ly - q(x)y = -f(x), \quad x \in \omega_h, \quad y|_{\gamma_h} = \mu, \quad L = \sum_{\alpha=1}^p L_\alpha.$$

Погрешность ее решения  $z = y - u$ , где  $u$  — решение задачи I,  $y$  — решение задачи II, находим из условий

$$(III) \quad Az - qz = -\psi, \quad x \in \omega_h, \quad z|_{\gamma_h} = 0,$$

где  $\psi = Au - Lu$  — погрешность аппроксимации для схемы II. Представим  $\psi = \psi^* + \tilde{\psi}$ , где  $\psi^* = \psi$  на  $\omega_h^*$ ,  $\psi^* = 0$  на  $\tilde{\omega}_h$ ,  $\tilde{\psi} = 0$  на  $\omega_h^*$  и положим  $z = z^* + \tilde{z}$ , где  $z^*(\tilde{z})$  — решение задачи III с правой частью  $\psi = \psi^*(\psi = \tilde{\psi})$ . Наша цель — получить равномерную оценку для  $z^*$ , имея в виду, что (см. [1])

$$(5) \quad \psi^* = O(h), \quad h = \max_{\alpha, \omega_h^*} h_\alpha, \quad x \in \omega_h^{*(\mp\alpha)}.$$

При оценке  $z^*$  безразлично, равномерна или неравномерна основная сетка  $\tilde{\omega}_h$ . Мы проводим доказательства теорем 1 и 2, считая, что  $\tilde{\omega}_h$  неравномерна.

4. Введем разностную функцию Грина  $G(x, \xi)$ ,  $x, \xi \in \bar{\omega}_h$ , задачи III, полагая

$$(6) \quad A_\xi G(x, \xi) - q(\xi) G(x, \xi) = -\frac{\delta(x, \xi)}{H(\xi)}, \quad x \in \bar{\omega}_h, \quad \xi \in \omega_h, \quad G|_{\xi \in \gamma_h} = 0,$$

где  $\delta(x, \xi) = 0$  при  $x \neq \xi$ ,  $\delta(x, x) = 1$ ,  $A_\xi$  оператор  $A$ , действующий на функцию аргумента  $\xi$ . Из (6) следует:

$$1) G(x, \xi) > 0 \text{ при } x \in \omega_h, \xi \in \omega_h; \quad 2) G(x, \xi) = G(\xi, x).$$

**Лемма.** *Справедлива оценка*

$$(7) \quad \sum_{\alpha=1}^p \{(G_{\bar{x}_\alpha}(x, \xi), 1)_{*(-\alpha)} + (-G_{\bar{x}_\alpha}(x, \xi), 1)_{*(+\alpha)}\} \leq \frac{1}{c_1}.$$

Для доказательства уравнение (III) надо умножить на  $H(\xi)$  и просуммировать по  $\omega_h$ ; для каждого из выражений  $A_\alpha G h_\alpha$  применяется одномерная формула суммирования по частям [1] вдоль цепочек  $r_\alpha$ , после чего используется (3) и неравенство  $G \geq 0$ .

Решение задачи III\* представим в виде  $z^*(x) = (G(x, \xi), \psi^*(\xi))$ , так что  $|z^*(x)| \leq \|\psi^*\|_0 \sum_{\alpha=1}^p \{(h_\alpha G, 1)_{*(-\alpha)} + (h_\alpha G, 1)_{*(+\alpha)}\} = \|\psi^*\|_0 \sum_{\alpha=1}^p \{(h_\alpha h_\alpha^-, G_{\bar{x}_\alpha}(x, \xi))_{*(-\alpha)} + (h_\alpha h_\alpha^+, -G_{\bar{x}_\alpha}(x, \xi))_{*(+\alpha)}\}$ , ( $\|\psi^*\|_0 = \max_{\omega_h} |\psi^*(x)|$ ), так как  $G(x, x_{\Lambda_\alpha}^*) = G(x, x_{\Pi_\alpha}^*) = 0$ . Отсюда и из (7) следует

$$(8) \quad \|z^*(x)\|_0 = \max_{\omega_h} |z^*(x)| \leq \frac{1}{c_1} \|\psi^*\|_0 h^2,$$

где  $h = \max_{\alpha, \omega_h^*} (h_\alpha, h_\alpha^\mp)$ . Тем самым доказана теорема

**Теорема 1.** Для решения задачи III\* ( $Az^* - qz^* = -\psi^*$ ,  $z^*|_{\gamma_h} = 0$ ) справедлива равномерная оценка (8).

Из теоремы 1 и (5) следует

**Теорема 2.** Если  $u \in C^{(3)}(\bar{\Omega})$ ,  $k_\alpha \in C^{(2)}(\bar{\Omega})$ , то

$$(9) \quad \|z^*(x)\|_0 \leq Mh^3,$$

где  $M$  — постоянная, не зависящая от сетки.

Замечание 1. Для уравнения Пуассона ( $k_\alpha = 1$ ,  $q \equiv 0$ ) можно написать более точные оценки. Обозначая  $M_s = \max_{\alpha, \bar{\Omega}} |\partial^s u / \partial x_\alpha^s|$ ,  $s = 1, 2, \dots$ , получим

$$(10) \quad \|z^*(x)\|_0 \leq \frac{1}{3}pM_3h^3, \text{ если } u \in C^{(3)}(\bar{\Omega}), \tilde{\omega}_h - \text{ произвольна,}$$

$$(11) \quad \|z^*(x)\|_0 \leq \frac{1}{3}M_3h^3 + \frac{1}{12}(p-1)M_4h^4, \text{ если } u \in C^{(4)}(\bar{\Omega}), \tilde{\omega}_h - \text{ равномерна.}$$

Оценка (10) в двухмерном случае ( $p = 2$ ) была получена другим методом в [3].

5. Равномерная оценка погрешности  $\tilde{z}$  за счет погрешности аппроксимации в основной зоне  $\tilde{\omega}_h$  сводится к оценке  $(G, 1)$ . Если  $\tilde{\omega}_h$  равномерна и  $k_\alpha$  меняются достаточно медленно, то метод мажорант [4] дает  $\tilde{z} = O(h^2)$  при  $u \in C^{(4)}$ ,  $k_\alpha \in C^{(3)}$ , так что  $\|y - u\|_0 = O(|h|^2)$ ,  $|h|^2 = \sum_{\alpha=1}^p h_\alpha^2$ . Случай, когда  $\tilde{\omega}_h$  неравномерна, рассмотрен в [1]. Полученная там оценка может быть улучшена и имеет вид

$$\|y - u\|_0 = O\left(\|h\|_0^2 \ln \frac{1}{H_*}\right),$$

где

$$H_* = \min_{\omega_h} H, \quad \|h\|_0^2 = \max_{\omega_h} \sum_{\alpha=1}^p h_\alpha^2.$$

#### Цитированная литература

- [1] А. А. Самарский: Локально-одномерные схемы на неравномерных сетках. Ж. вычислит. матем. и матем. физ., 1963, 3, № 3, 431—466.
- [2] А. Н. Тихонов, А. А. Самарский: Однородные разностные схемы на неравномерных сетках. Ж. вычислит. матем. и матем. физ., 1962, 2, № 5, 812—832.
- [3] W. R. Wasow: Discrete approximations to elliptic differential equations. Z. Angew. Math. Phys. 1955, 6, 81—97.
- [4] S. Gerschgorin: Fehlerabschätzung für das Differenzenverfahren zur Lösung partieller Differentialgleichungen. Z. Angew. Math. Mech. 1930, 10, 373—382.

А. А. Самарский, Кафедра вычислительной математики механико-математического факультета, Московский государственный университет, Москва, СССР.