

Aplikace matematiky

Ivo Babuška

Über optimale Formeln zur numerischen Berechnung linearer Funktionale

Aplikace matematiky, Vol. 10 (1965), No. 5, 441--443

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/102983>

Terms of use:

© Institute of Mathematics AS CR, 1965

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

PŘEDBĚŽNÁ SDĚLENÍ

ÜBER OPTIMALE FORMELN ZUR NUMERISCHEN BERECHNUNG
LINEARER FUNKTIONALE

[VORBERICHT]

IVO BABUŠKA

(Eingegangen am 10. Mai 1965.)

1. Es sei ein Banach'scher Raum B , ein Funktional $F \in B^*$ und die Folge

$$f_k^{(j)} \in B^*, \quad k = 0, 1, \dots, j; \quad j = 1, 2, \dots$$

gegeben. Das grundlegende Problem der numerischen Analysis ist die Approximierung des gegebenen Funktionals F durch eine lineare Kombination der Funktionale $f_k^{(j)}$. (Vgl. [1].)

Ein spezieller und typischer Fall ist das Problem der numerischen Quadratur. Hier ist

$$F(\varphi) = \int_0^1 \varphi(x) dx, \quad f_k^{(j)}(\varphi) = \varphi\left(\frac{k}{j}\right)$$

und wir setzen

$$F \sim \sum_{k=0}^j a_k^{(j)} f_k^{(j)}(\varphi).$$

Das Problem optimaler numerischer Formeln (z.B. Quadraturformeln) hängt mit der Wahl der Koeffizienten $a_k^{(j)}$, $k = 0, \dots, j$; $j = 1, 2, \dots$ zusammen, sodaß die Norm des Fehleroperator

$$F - \sum_{k=0}^j a_k^{(j)} f_k^{(j)}$$

minimalisiert wird.

Die Wahl der Koeffizienten $a_k^{(j)}$, welche die Norm des Fehleroperator minimalisieren, hängt eng mit dem Raum B zusammen. Die konkrete Wahl, aber, eines geeigneten Raumes B ist in der numerischen Praxis oft sehr unverläßlich. Das „Risiko“ der Wahl eines konkreten B können wir jedoch oft auf folgende Weise herabsetzen. Wir wählen eine Menge \mathfrak{M} von Räumen B so, daß $F \in B^*$ und $f_k^{(j)} \in B^*$, $k = 0, \dots, j$; $j = 1, \dots$ für alle $B \in \mathfrak{M}$.

Wir bezeichnen

$$\chi^{(B)}(j) = \inf_{a_k^{(j)}} \left\| F - \sum_{k=0}^j a_k^{(j)} f_k^{(j)} \right\|_{B^*},$$

und wählen die Koeffizienten $b_k^{(j)}$, $k = 0, \dots, j$; $j = 1, \dots$ und setzen

$$\beta_j^{(B)}(\alpha, \{b_k^{(j)}\}) = \frac{\left\| F - \sum_{k=0}^j b_k^{(j)} f_k^{(j)} \right\|_{B^*}}{\chi^{(B)}([j\alpha])}, \quad 0 < \alpha \leq 1.$$

Wenn die Koeffizienten $b_k^{(j)}$ die Eigenschaft haben werden, daß für jedes $B \in \mathfrak{M}$ die Folge $\beta_j^{(B)}(1, \{b_k^{(j)}\})$, $j = 1, 2, \dots$, beschränkt sein wird, resp.

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \beta_j^{(B)}(1, \{b_k^{(j)}\}) = 1,$$

so sagen wir, daß die Formel

$$\sum_{k=0}^j b_k^{(j)} f_k^{(j)}$$

universal größenordnungsmäßig resp. universal asymptotisch optimal ist.

Wenn die Folge

$$\beta_j^{(B)}(\alpha, \{b_k^{(j)}\}), \quad j = 1, 2, \dots, \quad 0 < \alpha < 1$$

für jedes $B \in \mathfrak{M}$ beschränkt ist, so sprechen wir von einer universal fast größenordnungsmäßig optimalen Formel.

Vom Standpunkt der numerischen Praxis ist oft das „Risiko“ der Wahl von \mathfrak{M} kleiner als die Wahl des konkreten Raumes B .

2. Wir wollen einige Ergebnisse im Zusammenhang mit den Problemen der Quadraturformeln im Raum der periodischen Funktionen anführen.

Wir bezeichnen \mathcal{H} den Raum aller reeller Folgen $\gamma = (\gamma_0, \gamma_1, \dots)$, welche folgende Eigenschaften haben:

1. $\gamma_j \geq 0$, $\gamma_0 > 0$, $j = 0, 1, \dots$;
2. Es ex. $j_0 > 0$, so daß $\gamma_{j_0} > 0$;
3. $\lim_{j \rightarrow \infty} \sqrt[j]{\gamma_j} = 0$.

Wir ordnen jedem $\gamma \in \mathcal{H}$ einen Banach'schen Raum B_γ aller total stetiger 2π -periodischer komplexer Funktionen φ mit der Norm

$$\|\varphi\|_{B_\gamma}^2 = \sum_{j=0}^{\infty} \gamma_j \int_0^{2\pi} |\varphi^{(j)}(x)|^2 dx$$

zu.

Die Menge \mathfrak{M} mögen alle B_γ , $\gamma \in \mathcal{H}$ bilden. Es gilt nun folgender Satz.

Satz 1. Es sei

$$F(\varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{ipx} \varphi(x) dx; \quad f_k^{(j)}(\varphi) = \varphi\left(\frac{2\pi}{j} k\right), \quad k = 0, 1, \dots, j, \quad j = 1, 2, \dots$$

Dann ist die Formel

$$\frac{1}{j} \sum_{k=1}^j e^{ip(2\pi/j)k} f_k^{(j)}$$

universal asymptotisch optimal.

Satz 2. Unter den Voraussetzungen von Satz 1 sei $\gamma \in \mathcal{H}$ und $\{^{(\gamma)}a_k^{(j)}\}$ seien von der Art, daß

$$\beta_j^{(B_\gamma)}(1, \{^{(\gamma)}a_k^{(j)}\}) = 1.$$

Dann existiert ein $\hat{\gamma} \in \mathcal{H}$ derart, daß

$$\beta_j^{(B_{\hat{\gamma}})}(1, \{^{(\gamma)}a_k^{(j)}\}) \rightarrow \infty$$

für $j \rightarrow \infty$ ist.

Satz 3. Es sei

$$g(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{ikx}$$

eine 2π -periodische quadratisch integrierbare komplexe Funktion. Es sei

$$F(\varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(x) \varphi(x) dx, \quad f_k^{(j)}(\varphi) = \varphi\left(\frac{2\pi}{j} k\right).$$

Dann ist die Formel

$$\frac{1}{j} \sum_{k=1}^j \sum_{n=-[j/2]}^{n=[j/2]} c_n e^{in(2\pi/j)k} f_k^{(j)}$$

universal fast größenordnungsmäßig optimal.

Auf Grund ähnlicher Schlußfolgerungen lassen sich in einer Reihe von Fällen nicht nur universale Approximierungen von Funktionalen, aber auch universale Approximierungen von Operatoren konstruieren.

Literatur

- [1] И. Бабушка, С. Л. Соболев: Оптимизация численных методов. Апликасе Математикы 10 (1965), 96–130.

Anschrift des Autoren: Ing. dr. Ivo Babuška Dr. Sc., Matematický ústav ČSAV, Praha 1, Žitná 25.