Aplikace matematiky

Luděk Granát

Poznámka k článku M. Kuniaka: Grafické určovanie charakteristik obalových skrutkových ploch

Aplikace matematiky, Vol. 11 (1966), No. 1, 63--66

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/103000

POZNÁMKA K ČLÁNKU M. KUNIAKA: GRAFICKÉ URČOVANIE CHARAKTERISTÍK OBALOVÝCH SKRUTKOVÝCH PLÔCH[1])

LUDĚK GRANÁT

(Došlo dne 2. dubna 1965.)

M. Kuniak na str. 460 uvádí větu 8, v níž určuje konoid vytvořený normálami sestrojenými v bodech charakteristiky e obalové šroubové plochy k příslušné tvořící rotační válcové ploše.

Tento konoid je hyperbolický paraboloid.

V práci [1] je ukázáno, že p-průmět osy a šroubového pohybu o parametru p $(p = v^0)$ na danou rotační plochu φ o ose o (který je jen jiným označením charakteristiky e obalové šroubové plochy vzniklé šroubovým pohybem o ose a a parametru p plochy φ, podrobněji viz [2]) se dá sestrojit jako n-průmět (n-průmětem nazýváme p-průmět pro $p = 0$) přímky q, sdružené s osou o vzhledem k lineárnímu přímkovému komplexu o ose a a parametru p, na plochu φ. V práci [1] je popsána též konstrukce sdružené poláry q.

Odtud plyne, že vyšetřování charakteristiky obalové šroubové plochy v případě, že tvořící plochou φ je rotační plocha, lze převést na vyšetřování charakteristiky obalové rotační plochy s toutéž tvořící plochou φ.

Mějme rotační válcovou plochu φ o ose o rotující kolem osy q. Normály plochy φ sestrojené v bodech příslušné charakteristiky e musí protínat osy o, q a být kolmé na o. Jsou-li osy o, q mimoběžné a q není kolmá na o, jsou hledané normály přímkami jednoho regulu hyperbolického paraboloidu α. Charakteristika e je v tomto případě průnikovou křivkou dané válcové plochy φ a hyperbolického paraboloidu α. Této vlastnosti můžeme též využít při konstrukci tečen charakteristiky e.

I u ostatních rotačních kvadrik φ lze získat charakteristiku e jako průnikovou křivku dané plochy φ s určitým hyperbolickým paraboloidem, který ovšem bude různý od plochy tvořené normálami kvadriky φ v bodech charakteristiky e.

Omezme se na středové rotační kvadriky

$$g\,\frac{x^2 + y^2}{k^2} + h\,\frac{z^2}{m^2} = 1\,, \quad km \neq 0\,, \quad g = \pm 1\,, \quad h = \pm 1\,. \tag{1}$$

[1]) Aplikace matematiky 9 (1964), No. 6, 455—466.

Normály n této plochy v bodě o souřadnicích x, y, z jsou určeny Plückerovými souřadnicemi

$$g\frac{x}{k^2},\ g\frac{y}{k^2},\ h\frac{z}{m^2},\ \frac{hk^2 - gm^2}{k^2m^2}\,yz,\ \frac{gm^2 - hk^2}{k^2m^2}\,xz,\ 0\,.$$

Uvažujme jen přímky q, které jsou mimoběžné s osou rotační kvadriky. Zvolíme-li rovinu procházející osou o a rovnoběžnou s q za rovinu yz a označíme-li x_0, 0, z_0 souřadnice průsečíku přímky q s rovinou xz, budou Plückerovy souřadnice přímky q:

$$0,\ b,\ c,\ -bz_0,\ -cx_0,\ bx_0\,. \tag{2}$$

Aby normály n protínaly přímku q danou souřadnicemi (2), musí platit

$$b(gm^2 - hk^2)\,xz - bz_0m^2gx - cx_0m^2gy + bx_0hk^2z = 0\,. \tag{3}$$

Tento vztah představuje rovnici hyperbolického paraboloidu α, jehož jedna řídící rovina je kolmá na osu o rotační kvadriky φ a druhá je rovnoběžná s osou rotační kvadriky a s přímkou q. Hyperbolický paraboloid α obsahuje jednak přímku q, jednak přímku rovnoběžnou s o danou rovnicemi

$$x = -\frac{hk^2}{gm^2 - hk^2}\,x_0\,,\quad y = \frac{hk^2}{gm^2 - hk^2}\,\frac{bz_0}{c}\,. \tag{4}$$

Důkaz provedeme dosazením rovnic (4) do rovnice hyperbolického paraboloidu α. Tato přímka prochází bodem Q, který leží na spojnici středu S kvadriky φ s průsečíkem M přímky q s rovinou kolmou na osu o kvadriky φ a procházející jejím středem S, přičemž $\overrightarrow{SQ} = -hk^2/(gm^2 - hk^2)\,\overrightarrow{SM}$.

V případě soustavy hyperboloidů φ_λ s týmž asymptotickým kuželem dostáváme tentýž hyperboloický paraboloid α.

Pro rotační paraboloid lze provést obdobné úvahy.

Uvedených vztahů možno s výhodou využít i při grafických konstrukcích.

Charakteristika e anuloido-šroubové plochy je křivka stupně 8. V článku M. Kuniaka je uveden stupeň 16. V tomto případě nelze uvažovat, podobně jako v případě charakteristiky e u Archimedovy serpentiny, nevlastní součást průnikové křivky dvou ploch φ.

Rovnici anuloidu můžeme psát ve tvaru

$$(x^2 + y^2 + z^2)^2 - 2(x^2 + y^2)(m^2 + r^2) + 2z^2(m^2 - r^2) + (m^2 - r^2) = 0\,, \tag{5}$$

kde r je poloměr rotující kružnice – polomeridiánu a m vzdálenost středu této kružnice od osy o.

Normála n anuloidu v bodě o souřadnicích x, y, z má Plückerovy souřadnice

$$x(x^2 + y^2 + z^2 - m^2 - r^2), \quad y(x^2 + y^2 + z^2 - m^2 - r^2),$$
$$z(x^2 + y^2 + z^2 + m^2 - r^2), \quad 2m^2yz, \quad -2m^2xz, \quad 0.$$

Aby normála n protínala přímku q danou Plückerovými souřadnicemi (2), musí platit

$$(6) \quad (bz_0x + cx_0y - bx_0z)(x^2 + y^2 + z^2 - m^2 - r^2) + 2bm^2z(x - x_0) = 0.$$

Charakteristiku e anuloido-šroubové plochy lze dostat jako vlastní součást průnikové křivky anuloidu (5) s kubickou plochou danou rovnicí (6).

Tím jsou ukázány některé vztahy, které lze využít při konstrukci obalových šroubových ploch, je-li tvořící plocha rotační kvadrika neb anuloid.

Literatura

[1] *А. Д. Посвянский:* Ортогональное проектирование на кривые поверхности и его приложения к вопросам геометрии пространственных зубчатых зацеплений. Сборник статей: Методы начертательной геометрии и ее приложения. Москва 1955.

[2] *L. Granát:* O p-průmětu přímky na plochu. Časopis pro pěstování matematiky 90 (1965), No. 2, 194—199.

Резюме

ЗАМЕТКА К СТАТЬЕ М. КУНИАКА: ГРАФИЧЕСКОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ХАРАКТЕРИСТИК ВИНТОВЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ КОЖУХА

ЛУДЕК ГРАНАТ (LUDĚK GRANÁT)

Коноид, образованный нормалями, построенными в точках характеристики огибающей винтовой поверхности к образующей поверхности цилиндра вращения, есть гиперболический параболоид. Как линию пересечения образующей поверхности и гиперболического параболоида можно построить тоже характеристику огибающей винтовой поверхности в том случае, когда образующая поверхность является поверхностью вращения 2-го порядка. Характеристика огибающей винтовой поверхности в случае, когда образующая поверхность является тором, есть кривая 8-го порядка, которую можно определить уравнениями (5) и (6).

Zusammenfassung

EINE BEMERKUNG ZUM ARTIKEL VON M. KUNIAK: GRAPHISCHE BESTIMMUNG DER CHARAKTERISTIKEN DER SCHRAUBENHÜLLFLÄCHEN

LUDĚK GRANÁT

Das Konoid, das von den Normalen in den Punkten der Charakteristik der Schraubenhüllfläche zur erzeugenden Zylinderrotationsfläche gebildet wird, ist ein hyperbolisches Paraboloid. Ähnlich wie die Schnittkurve der erzeugenden Fläche mit dem hyperbolischen Paraboloid, kann man auch die Charakteristik der Schraubenhüllfläche im Falle, daß die erzeugende Fläche eine Rotationsfläche zweiten Grades ist, konstruieren. Die Charakteristik der Schraubenhüllfläche im Falle, daß die erzeugende Fläche eine Ringfläche ist, ist eine Kurve 8. Grades, die man durch die Gleichungen (5) und (6) bestimmen kann.

Adresa autora: Luděk Granát, Výzkumný ústav matematických strojů, Loretánské nám. 3, Praha 1.