L. V. Vojtíšek

Отыскание наилучшего в смысле Чебышева решения несовместной системы линейных алгебраических уравнений

Aplikace matematiky, Vol. 11 (1966), No. 3, 232--237

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/103020

ОТЫСКАНИЕ НАИЛУЧШЕГО В СМЫСЛЕ ЧЕБЫШЕВА РЕШЕНИЯ НЕСОВМЕСТНОЙ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Л. В. ВОЙТИШЕК

(Поступило в редакцию 20 сентября 1964 г.)

Дана несовместная система линейных алгебраических уравнений

$$
\begin{aligned}
&a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1\,, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m,\ m \gg n\,.
\end{aligned} \tag{1}
$$

Задача I. *Требуется найти приближенное решение этой системы, дающее наименьшее абсолютное уклонение от нуля разностей*

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n - b_i = \Delta_i\,, \tag{2}$$

т.е. $\min\limits_{x_1,\ldots,x_n} [\max\limits_i |\Delta_i|] = \varrho,\ i = 1, \ldots, m.$

Предполагается, что ранг системы равен $n + 1$. Решение этой задачи сводится к решению двойственной задачи, которая формулируется следующим образом:

Задача II. *Найти* $\min \psi(\omega_1, \ldots, \omega_m) = \varrho_1$, *где*

$$\psi(\omega_1, \ldots, \omega_m) = \sum_{k=1}^{m} |\omega_k| \tag{3}$$

при условиях

$$\sum_{k=1}^{m} a_{ki}\omega_k = 0\,,\quad \sum_{k=1}^{m} b_k\omega_k = -1\,,\quad i = 1, \ldots, n\,. \tag{4}$$

В решении задачи I максимальными по модулю могут быть не более $n + 1$ невязок Δ.

В решении задачи II те ω, соответствующие максимальным $|\Delta|$, не равны нулю, остальные ω обращаются в нуль.

Точка, дающая решение задачи I, должна лежать на плоскостях, уравнения которых

$$\sum_{j=1}^{n} a_{i_k j} x_j - b_{i_k} = \Delta_{i_k}, \quad k = 1, \ldots, l, \tag{5}$$

где

$$\Delta_{i_k} = \operatorname{sign} \omega_{i_k} \cdot \varrho, \quad \varrho = \frac{1}{\varrho_1},$$

а i_k - номера ω, не равных нулю. Система (5) имеет ранг $l - 1$. При $l = n + 1$ решение задачи II, а значит и задачи I, единственно. В этом случае решением задачи I будет точка $(x_1, \ldots, x_n)$, координаты которой удовлетворяют совместной системе (5). Если $l < n + 1$, решение задачи I тоже должно удовлетворять системе (5), но в этом случае из (5) невозможно единственным образом определить решение задачи I.

Задача отыскания решения несовместной системы в этом случае сведется к **задаче III:** *Найти решение, дающее* $\min\limits_{x_1, \ldots, x_n} [\max\limits_{i} |\Delta_i|]$ *при условиях* (5).

Далее приводятся алгоритмы для решения задач II и III.

Задача II решается при помощи метода наискорейшего спуска.

Выделим из матрицы

$$M = \begin{pmatrix} a_{11}, a_{21}, \ldots, a_{m1} \\ a_{12}, a_{22}, \ldots, a_{m2} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{1n}, a_{2n}, \ldots, a_{mn} \\ b_1, \ b_2, \ \ldots, b_m \end{pmatrix}$$

квадратную матрицу $M^{(1)}$ порядка $n + 1$ с определителем, отличным от нуля. Пусть номера столбцов, вошедших в $M^{(1)}$, будут $j_1, \ldots, j_{n+1}$. Матрицу, составленную из оставшихся столбцов, назовем $M^{(2)}$. Обозначим через $\omega^{(1)}$ вектор $(\omega_{j_1}, \ldots, \omega_{j_{n+1}})$, через $\omega^{(2)}$ вектор $(\omega_{i_1}, \omega_{i_2}, \ldots, \omega_{i_{m-n-1}})$. Тогда система запишется в виде $M^{(1)}\omega^{(1)} + M^{(2)}\omega^{(2)} + i_{n+1} = 0$, где

$$i_{n+1} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Введем обозначения

$$[M^{(1)}]^{-1} = G, \quad GM^{(2)} = C, \quad G_{i_{n+1}} = \begin{pmatrix} g_{1,n+1} \\ \vdots \\ g_{n,n+1} \end{pmatrix}.$$

Умножая систему слева на G, получим $\omega^{(1)} + C\omega^{(2)} + G_{i_{n+1}} = 0$. Подставим в ψ выражение ω_{j_s} через остальные ω

$$\psi = \sum_{k=1}^{n+1} \left| \sum_{t=1}^{m-n-1} c_{kt}\omega_{i_t} + g_{k,n+1} \right| + \sum_{t=1}^{m-n-1} |\omega_{i_t}| .$$

Выделим из первой суммы слагаемые, в которых $g_{k,n+1} = 0$,

$$\psi = \sum_{\substack{k=1 \\ g_{k,n+1} \neq 0}}^{n+1} \left| \sum_{t=1}^{m-n-1} c_{kt}\omega_{i_t} + g_{k,n+1} \right| + \sum_{\substack{k=1 \\ g_{k,n+1} = 0}}^{n+1} \left| \sum_{t=1}^{m-n-1} c_{kt}\omega_{i_t} \right| + \sum_{t=1}^{m-n-1} |\omega_{i_t}| .$$

Вблизи точки $\omega_{i_t} = 0$ ψ может быть записана в виде

$$\psi = \sum_{\substack{k=1 \\ g_{k,n+1} \neq 0}}^{n+1} \left(\sum_{t=1}^{m-n-1} c_{kt}\omega_{i_t} + g_{k,n+1} \right) \operatorname{sign} g_{k,n+1} + \sum_{\substack{k=1 \\ g_{k,n+1} = 0}}^{n+1} \left| \sum_{t=1}^{m-n-1} c_{kt}\omega_{i_t} \right| + \sum_{t=1}^{m-n-1} |\omega_{i_t}| ,$$

$$\operatorname{grad}_t^{\pm} \psi = \sum_{\substack{k=1 \\ g_{k,n+1} \neq 0}}^{n+1} c_{kt} \operatorname{sign} g_{k,n+1} \pm \left(1 + \sum_{\substack{k=1 \\ g_{k,n+1} = 0}}^{n+1} |c_{kt}|\right) = A_t \pm (1 + B_t) .$$

Направлением наискорейшего спуска будет то, в котором $\operatorname{grad}^+ \psi < 0$ или $\operatorname{grad}^- \psi > 0$ принимает наибольшее по модулю значение. Так как $\operatorname{grad}^+ \psi$ может быть <0 лишь при $A_t < 0$ и $\operatorname{grad}^- \psi > 0$ при $A_t > 0$, то сравнение чисел $|A_t + 1 + B_t|$ при $A_t < 0$ и $|A_t - 1 - B_t|$ при $A_t > 0$ сводится к сравнению чисел $|A_t| - B_t = M_t$,

$$A_t = \sum_{\substack{k=1 \\ g_{k,n+1} \neq 0}}^{n+1} c_{kt} \operatorname{sign} g_{k,n+1} = \sum_{\substack{k=1 \\ g_{k,n+1} \neq 0}}^{n+1} \sum_{l=1}^{n+1} g_{kl} a_{tl} \operatorname{sign} g_{k,n+1} =$$

$$= \sum_{l=1}^{n+1} a_{tl} \left(\sum_{k=1}^{n+1} g_{kl} \operatorname{sign} g_{k,n+1} \right) = \sum_{l=1}^{n+1} a_{tl} \lambda_l .$$

Для вычисления M_t составим вектор $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_{n+1})$ и матрицу

$$K = \begin{pmatrix} g_{k_1 1}, \ldots, g_{k_1 n}, 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ g_{k_S 1}, \ldots, g_{k_S n}, 0 \end{pmatrix},$$

где $k_1, \ldots, k_S$ – номера строк матрицы G с равными нулю последними элементами,

$$M_t = |(\lambda, a_t)| - \sum_{l=1}^{S} |(g_l, a_t)| , \tag{6}$$

где a_t - вектор-столбец матрицы $M^{(2)}$, g_l - вектор-столбец матрицы K. Если все M_t окажутся <1, то задача решена, т.е. точка минимума ψ найдена. В противном случае из всех M_t выбираем наибольшее. Пусть это будет M_m. Направление ω_m будет направлением наискорейшего спуска. На оси ω_m

$$\psi = \sum_{k=1}^{n+1} \left| c_{km}\omega_m + g_{k,n+1} \right| + \left| \omega_m \right| .$$

Из всех значений ψ на ω_m выберем наименьшее. min ψ может быть достигнут в тех точках, где выполняется одно из равенств

$$c_{km}\omega_m + g_{k,n+1} = 0 , \quad k = 1, \ldots, n + 1 .$$

Пусть min достигается при $k = r$, т.е. точке, где ненулевыми могут оставаться координаты с номерами $m, j_1, \ldots, j_{r-1}, j_{r+1}, \ldots, j_{n+1}$. Поменяв местами столбцы с номерами m и j_r, перейдем к повторению описанного алгоритма. После конечного числа шагов приходим к точке, дающей решение задачи II. Пусть при этом неравными нулю будут $\omega_{i_1}, \omega_{i_2}, \ldots, \omega_{i_l}$, $l \leqq n + 1$.

Перейдем теперь к отысканию решения задачи I. Как уже было упомянуто выше, при $l = n + 1$ решение задачи I находится из системы (5). В случае $l < n + 1$ для отыскания решения задачи I необходимо решить задачу III.

Выбросив из системы (5) одно из уравнений, добавим к ней $n - l + 1$ уравнение из системы (1) так, чтобы матрица получившейся системы была неособенной. Обозначим эту матрицу через B, а столбец свободных членов d. Введем новую систему координат

$$x' = Bx - d , \quad x = B^{-1}x' + B^{-1}d .$$

После преобразования системы (1)

$$AB^{-1}x' = b - AB^{-1}d . \tag{7}$$

Задача III сформулируется так: Найти решение, дающее

$$\min_{x'_1,\ldots,x'_n} \left[\max_i |\Delta_i|\right] \quad \text{при} \quad x'_1 = x'_2 = \ldots = x'_{l-1} = 0 .$$

Положив в равенстве (7) $x'_1 = \ldots = x'_{l-1} = 0$, сведем задачу III к задаче I для числа переменных $n - l + 1$.

Для решения задачи по описанному выше алгоритму составлена программа для электронно-счетной машины. Было решено несколько систем 180 уравнений с 10–20 неизвестными. Решение одной системы с 10 неизвестными длится 1,5 мин.

Литература

[1] *Ремез Е. Я.:* Общие вычислительные методы чебышевского приближения. Киев 1957.
[2] *Ахиезер Н. И., Крейн М. Г.:* О некоторых вопросах теории моментов ТОНТИ. Харьков 1938.
[3] *Зуховицкий С. И.:* О приближении действительных функций в смысле Чебышева. Успехи мат. наук 1956, т. XI, вып. 2 (68).

Výtah

NEJLEPŠÍ ČEBYŠEVSKÁ APROXIMACE ŘEŠENÍ PŘEURČENÉ SOUSTAVY LINEÁRNÍCH ALGEBRAICKÝCH ROVNIC

L. V. Vojtíšková

Práce se zabývá nalezením v čebyševském smyslu nejlepšího řešení přeurčené soustavy (1) lineárních algebraických rovnic, tj. řešením úlohy I.

Úloha I. *Nalézt přibližné řešení soustavy* (1), *které dává minimální absolutní hodnotu výrazů* (2).

Tato úloha se převede na řešení úlohy II.

Úloha II. *Nalézt čísla* $\omega_1, \ldots, \omega_m$, *vyhovující podmínkám* (4) *tak, aby funkce* $\psi(\omega_1, \ldots, \omega_m)$, *daná vzorcem* (3), *nabývala minima.*

Řešení úlohy I pak vyhovuje soustavě (5). V případě $l = n + 1$ je řešení úlohy II, a tedy i úlohy I, jednoznačně určeno. Je-li $l < n + 1$, je třeba ještě řešit úlohu III.

Úloha III. *Nalézt řešení soustavy* (5), *pro něž se dosahuje* $\min\limits_{x_1, \ldots, x_n} (\max\limits_i |\Delta_i|)$.

Úloha II se řeší metodou největšího spádu. Vypočtou se veličiny M_t podle vzorce (6). Je-li $M_t < 1$ pro všechna t, je úloha II, a tedy i úloha I, řešena. V opačném případě je třeba řešit úlohu III. Její řešení se převádí na řešení úlohy I pro soustavu (7) s $n - l + 1$ proměnnými.

Popsaný algoritmus je naprogramován pro samočinný počítač.

Summary

BEST TSHEBYSHEV APPROXIMATION TO SOLUTION OF OVER-DETERMINATE LINEAR EQUATIONS

L. V. Vojtishek

The problem considered is that of finding approximate solutions, best in a Tshebyshev sense, of an over-determinate system of linear algebraic equations, i.e. of solving the following

Problem I. *To find an approximate solution of* (1) *which minimizes the absolute values in* (2).

This is then transformed into the equivalent

Problem II. *To determine* $\omega_1, \ldots, \omega_m$ *satisfying* (4) *so as to minimize the function* ψ *in* (3).

Solutions of problem I then satisfy the system (5). In the case $l = n + 1$ the solution of problem II (and hence of problem I also) is unique; for $l < n + 1$ it is also necessary to solve the

Problem III. *To determine a solution of* (5) *which realizes* $\min\limits_{x_1, \ldots, x_n} (\max\limits_i |\Delta_i|)$.

Problem II is solved by gradient methods. If $M_t < 1$ for all t (cf. (6)) the solution of problem II is complete; if not, then it is needed to solve problem III, which may be transformed to problem I for the system (7) with $n - l + 1$ unknowns.

A computer programme of the described algorithm is also given.

Адрес автора: Л. В. Войтишек, Сибирское отделение АН СССР, Институт математики, Новосибирск 90, СССР.