

Aplikace matematiky

Ján Čepel; Andrej Šiposs

Obálka n -parametrickej sústavy plôch v priestore

Aplikace matematiky, Vol. 12 (1967), No. 3, 217--218

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/103091>

Terms of use:

© Institute of Mathematics AS CR, 1967

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

OBÁLKA n -PARAMETRICKEJ SÚSTAVY PLOCH V PRIESTORE

JÁN ČEPEL, ANDREJ ŠIPOSS

(Došlo dňa 3. novembra 1966.)

Úvod. Pre sústavu plôch, ktoré sú dané rovnicami $x = f(t_1, t_2, \dots, t_n)$, $y = g(t_1, t_2, \dots, t_n)$, $z = h(t_1, t_2, \dots, t_n)$, kde t_1, t_2, \dots, t_n sú na sebe nezávislé parametre, hľadáme rovnicu obalovej plochy, pričom obecné nevieme vyjadriť rovnicu sústavy o $n - 1$ parametroch pomocou konečného počtu elementárnych funkcií.

Veta. *Majme dané funkcie $x = f(t_1, t_2, \dots, t_n)$, $y = g(t_1, t_2, \dots, t_n)$, $z = h(t_1, t_2, \dots, t_n)$, ktoré sú v n rozmernej oblasti $t_{i1} \leq t_1 \leq t_{i2}$ pre $i = 1, 2, \dots, n$ spojité a majú spojité parciálne derivácie podľa t_i ; ak sústava plôch určená týmito rovnicami má obalovú plochu určenú rovnicami $x = \varphi(t_k, t_m)$, $y = \psi(t_k, t_m)$, $z = \chi(t_k, t_m)$, ktoré sú v oblasti $t_{k1} \leq t_k \leq t_{k2}$, $t_{m1} \leq t_m \leq t_{m2}$ spojité a majú spojité parciálne derivácie, potom rovnice obalovej plochy dostaneme vylúčením $n - 2$ parametrov z rovníc*

$$(1) \quad x = f(t_1, t_2, \dots, t_i, \dots, t_n),$$

$$(2) \quad y = g(t_1, t_2, \dots, t_i, \dots, t_n),$$

$$(3) \quad z = h(t_1, t_2, \dots, t_i, \dots, t_n),$$

$$(4) \quad D_i = \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial t_{i-1}} & \frac{\partial f}{\partial t_i} & \frac{\partial f}{\partial t_{i+1}} \\ \frac{\partial g}{\partial t_{i-1}} & \frac{\partial g}{\partial t_i} & \frac{\partial g}{\partial t_{i+1}} \\ \frac{\partial h}{\partial t_{i-1}} & \frac{\partial h}{\partial t_i} & \frac{\partial h}{\partial t_{i+1}} \end{vmatrix} = 0 \text{ pre } i = 2, 3, \dots, n - 1.$$

Dôkaz: Predpokladajme, že existuje obalová plocha. Táto sa dotýka plôch $x = f(t_{i-1}, t_i, t_{i+1})$, $y = g(t_{i-1}, t_i, t_{i+1})$, $z = h(t_{i-1}, t_i, t_{i+1})$ v nejakom bode, kde ostatné parametre majú konštantné hodnoty, a majú v tomto bode spoločnú dotykovú rovinu s obalovou plochou. Táto dotyková rovina je kolmá na normálovej rovine čiar

$$\begin{aligned}
 x &= f(t_{i-1}), & y &= g(t_{i-1}), & z &= h(t_{i-1}), \dots, t_i = \text{konšt.}, & t_{i+1} &= \text{konšt.}, \\
 x &= f(t_i), & y &= g(t_i), & z &= h(t_i), \dots, t_{i-1} = \text{konšt.}, & t_{i+1} &= \text{konšt.}, \\
 x &= f(t_{i+1}), & y &= g(t_{i+1}), & z &= h(t_{i+1}), \dots, t_{i-1} = \text{konšt.}, & t_i &= \text{konšt.},
 \end{aligned}$$

ktoré v bode (x_0, y_0, z_0) majú rovnice

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial f}{\partial t_{i-1}}(x - x_0) + \frac{\partial g}{\partial t_{i-1}}(y - y_0) + \frac{\partial h}{\partial t_{i-1}}(z - z_0) &= 0, \\
 \frac{\partial f}{\partial t_i}(x - x_0) + \frac{\partial g}{\partial t_i}(y - y_0) + \frac{\partial h}{\partial t_i}(z - z_0) &= 0, \\
 \frac{\partial f}{\partial t_{i+1}}(x - x_0) + \frac{\partial g}{\partial t_{i+1}}(y - y_0) + \frac{\partial h}{\partial t_{i+1}}(z - z_0) &= 0
 \end{aligned}$$

a tvoria zväzok pre ktorý platí

$$D_i = \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial t_{i-1}}, & \frac{\partial f}{\partial t_i}, & \frac{\partial f}{\partial t_{i+1}} \\ \frac{\partial g}{\partial t_{i-1}}, & \frac{\partial g}{\partial t_i}, & \frac{\partial g}{\partial t_{i+1}} \\ \frac{\partial h}{\partial t_{i-1}}, & \frac{\partial h}{\partial t_i}, & \frac{\partial h}{\partial t_{i+1}} \end{vmatrix} = 0.$$

Pretože všetky parametre sú rovnocenné, môžeme tento postup previesť pre $i = 2, 3, \dots, n-1$ čiže dostaneme $n-2$ na sebe nezávislých determinantov, ktoré dostaneme z matice

$$A = \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial t_1}, & \frac{\partial f}{\partial t_2}, & \dots, & \frac{\partial f}{\partial t_i}, & \dots, & \frac{\partial f}{\partial t_n} \\ \frac{\partial g}{\partial t_1}, & \frac{\partial g}{\partial t_2}, & \dots, & \frac{\partial g}{\partial t_i}, & \dots, & \frac{\partial g}{\partial t_n} \\ \frac{\partial h}{\partial t_1}, & \frac{\partial h}{\partial t_2}, & \dots, & \frac{\partial h}{\partial t_i}, & \dots, & \frac{\partial h}{\partial t_n} \end{vmatrix}$$

Záver. n -parametrickú sústavu plôch o parametroch t_1, t_2, \dots, t_n môžeme teda znázorniť ako n sústav jednoparametrických čiar, keď vždy $n-1$ parametrov považujeme za konštanty. Obalová plocha, ktorá má v každom svojom bode normálu, ktorou prechádzajú normálové roviny všetkých kriviek idúcich týmto bodom.

Literatúra

J. Favard: Cours de géométrie différentielle locale; Paris 1957.

Adresy autorů: Doc. Ing. Ján Čepel C.Sc., Pasteurova 7, Košice. — Ing. Andrej Šiposs, Črmel'ská 57, Košice.