

Aplikace matematiky

A. V. Buledza

О методе расщепления в проблеме собственных функций и собственных значений разностных операторов

Aplikace matematiky, Vol. 13 (1968), No. 2, 133--136

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/103143>

Terms of use:

© Institute of Mathematics AS CR, 1968

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

О МЕТОДЕ РАСЩЕПЛЕНИЯ В ПРОБЛЕМЕ СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ И СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ РАЗНОСТНЫХ ОПЕРАТОРОВ

А. В. БУЛЕДЗА

Пусть $LW(x, y)$ — линейный дифференциальный оператор, рассматриваемый в прямоугольнике $\Omega \{0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b\}$, и

$$(1) \quad RW(m, n) = \sum_{i,j} C_{ij}W(m + i, n + j) \\ (i = -p, -p + 1, \dots, 0, 1, \dots, p; \quad j = -q, -q + 1, \dots, 0, 1, \dots, q)$$

— его разностный аналог, где C_{ij} — некоторые постоянные, а $W(m, n) = W(mh, nh)$ — любая функция, определенная на некотором дискретном множестве $\Omega_h \subset \Omega$.

Примечание. Множество Ω_h может содержать и точки, не принадлежащие Ω (внеконтурные точки), которые используются для аппроксимации краевых условий. Дискретное множество, содержащее внеконтурные точки, обозначим символом $\bar{\Omega}_h$.

Таким образом, мы будем рассматривать конечномерное B -пространство $(W(m, n) \in B)$ с действующими в нем операторами вида (1).

Определение 1. Пусть $R_v (v = 1, 2, \dots, r)$ — линейные операторы в пространстве B . Суммой операторов R_v будем называть такой оператор R , что для любого элемента $W \in B$ выполняется равенство

$$(2) \quad RW = \left(\sum_{v=1}^r R_v \right) W = \sum_{v=1}^r R_v W.$$

Определение 2. Введем в рассмотрение операторы:

$$(3) \quad R_1W(m, n) = \frac{1}{2}C_{00}W(m, n) + \sum_{\substack{i=-p \\ i \neq 0}}^p C_{i0}W(m + i, n),$$

$$(4) \quad R_2W(m, n) = \frac{1}{2}C_{00}W(m, n) + \sum_{\substack{j=-q \\ j \neq 0}}^q C_{0j}W(m, n + j),$$

$$(5) \quad R_\nu W(m, n) = \sum_{\substack{i=-p_\nu, p_\nu \\ j=-q_\nu, q_\nu}} C_{ij} W(m+i, n+j),$$

$$p_\nu \leq p-1, \quad q_\nu \leq q-1, \quad \nu = 3, 4, \dots, r.$$

Операторы R_ν ($\nu = 1, 2, \dots, r$) будем называть элементарными операторами. Среди элементарных операторов выделим операторы R_1 и R_2 , определенные соотношениями (3), (4), и назовем их главными элементарными операторами.

Определение 3. Если для данного разностного оператора R (1) и элементарных операторов R_ν выполнено условие (2) определения 1, то будем говорить, что оператор R расщеплен на сумму элементарных операторов.

Определение 4. Пусть $X(m)$, $Y(n)$ – функции, определенные на множестве точек $m = 0, 1, \dots, M$; $n = 0, 1, \dots, N$. Для каждого значения аргументов m и n вычислим соответствующие значения функций $X(m)$, $Y(n)$ и по этим значениям построим кусочно-линейные функции $\bar{X}(x)$, $x \in [0, M]$ и $\bar{Y}(y)$, $y \in [0, N]$, так чтобы выполнялись условия

$$\bar{X}(m) = X(m) \quad (m = 0, 1, \dots, M), \quad \bar{Y}(n) = Y(n) \quad (n = 0, 1, \dots, N).$$

Очевидно функции $\bar{X}(x)$, $\bar{Y}(y)$ в промежутках $[0, M]$, $[0, N]$ (соответственно) непрерывны.

Лемма 1. Пусть оператор (1) обладает свойством осевой симметрии, т.е. для любых фиксированных i, j выполнены условия

$$(6) \quad C_{ij} = C_{-i, j}, \quad C_{ij} = C_{i, -j}.$$

Тогда для произвольной функции $W(m, n)$, определенной на множестве Ω_n и представимой в виде

$$(7) \quad W(m, n) = X(m) Y(n),$$

выполняются равенства

$$(8) \quad R_1 W(m, n) = (R_1 X(m)) Y(n),$$

$$(9) \quad R_2 W(m, n) = (R_2 Y(n)) X(m),$$

.....

$$(10) \quad R_\nu W(m, n) = C_{p_\nu, q_\nu} (X(m-p_\nu) + X(m+p_\nu)) \times$$

$$\times (Y(n-q_\nu) + Y(n+q_\nu)),$$

$$\nu = 3, 4, \dots, r.$$

Лемма 2. Пусть $X_K(m), Y_S(n)$ – решения спектральных задач

$$(11) \quad R_1 X_K(m) - \lambda_K^{(1)} X_K(m) = 0,$$

$$(12) \quad l_{hi} X_K(m)|_{\Gamma_{hi}} = 0,$$

$$(13) \quad R_2 Y_S(n) - \lambda_S^{(2)} Y_S(n) = 0,$$

$$(14) \quad \tilde{l}_{hi} Y_S(n)|_{\tilde{\Gamma}_{hi}} = 0,$$

где l_{hi}, \tilde{l}_{hi} – операторы краевых условий. Тогда функции $W_{KS}^0(m, n) = X_K(m) Y_S(n)$ являются собственными функциями суммы операторов $(R_1 + R_2)$, и собственные значения λ_{KS} , соответствующие этим собственным функциям, определяются из соотношения

$$\lambda_{KS} = \lambda_K^{(1)} + \lambda_S^{(2)}.$$

Перейдем теперь к рассмотрению задачи:

$$(15) \quad R W_{KS}(m, n) - \bar{\lambda}_{KS} W_{KS}(m, n) = 0,$$

$$(16) \quad Z_i W_{KS}(m, n)|_{\Gamma_{hi}} = 0,$$

где R – разностный оператор (1), Z_i – операторы краевых условий.

Теорема. Если оператор (1) обладает свойством осевой симметрии и краевые условия (12), (14) в совокупности совпадают с краевыми условиями (16), то существует такое расщепление оператора (1) на сумму элементарных операторов R_v , что при достаточно малом шаге сетки h будем иметь:

$$(17) \quad \text{а) } W_{KS}(m, n) \approx W_{KS}^0(m, n),$$

где $W_{KS}(m, n)$ – собственные функции оператора (1), $W_{KS}^0(m, n)$ – собственные функции суммы главных элементарных операторов (3), (4);

$$(18) \quad \text{б) } \bar{\lambda}_{KS} \approx \lambda_K^{(1)} + \lambda_S^{(2)} + \sum_{v=3}^r \lambda_{KS}^{(v)},$$

где $\bar{\lambda}_{KS}$ – собственные значения оператора (1), $\lambda_K^{(1)}, \lambda_S^{(2)}, \lambda_{KS}^{(v)}$ – собственные значения операторов R_1, R_2, R_v ($v = 3, 4, \dots, r$).

Следствие 1. При измельчении шага сетки h погрешность приближенных соотношений (17), (18), убывает вместе с h , т.е. метод расщепления приводит к сходящемуся по h процессу.

Следствие 2. Если окажется, что собственные функции элементарных операторов R_v ($v = 3, 4, \dots, r$) совпадают с собственными функциями суммы главных элементарных операторов R_1 и R_2 , то приближенные соотношения (17), (18) превращаются в точные равенства.

В заключение заметим, что метод расщепления дает возможность построить легко реализуемые на электронных машинах алгоритмы решения задач о колебаниях, устойчивости и изгибе пластин и оболочек при сколь угодно большом числе узлов сетки. В частности, в применении к задачам о колебаниях пластин метод расщепления свободен от накопления вычислительных погрешностей и позволяет вычислить с достаточной точностью любое число частот и соответствующих форм колебаний независимо от условий на контуре. Это достигается тем, что алгоритм не связан с построением характеристического полинома матрицы разностного оператора и решением характеристического уравнения.

А. В. Булезда, Проспект 40-летия Октября 21, кв. 5, Ужгород, СССР.