Aplikace matematiky

Nikolai Nikolaevich Yanenko

Метод слабой аппроксимации для произвольного расщепления

Aplikace matematiky, Vol. 13 (1968), No. 2, 148--151

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/103146`

МЕТОД СЛАБОЙ АППРОКСИМАЦИИ ДЛЯ ПРОИЗВОЛЬНОГО РАСЩЕПЛЕНИЯ

Н. Н. ЯНЕНКО

Рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \mathscr{L} u , \tag{1}$$

где $u = \{u_1, \ldots, u_q\}$ – вектор-функция с q компонентами от $m + 1$ переменных t, $x = \{x_1, \ldots, x_m\}$, $\mathscr{L}$ – оператор. Для уравнения (1) может быть поставлена задача Коши в полупространстве $t \geqq t_0$, $|x| < \infty$:

$$u(x, t_0) = u_0(x) . \tag{1a}$$

Здесь $u(x, t)$, $u_0(x)$ – элементы некоторого банахова пространства B, $\mathscr{L}$ – оператор в B, вообще говоря неограниченный.

Пусть

$$\mathscr{L} = \mathscr{L}_1 + \mathscr{L}_2 + \ldots + \mathscr{L}_p , \tag{2}$$

где $\mathscr{L}_1, \ldots, \mathscr{L}_p$ – операторы в B. Поставим в соответствие задаче (1), (1a) задачу

$$\frac{\partial u_\tau}{\partial t} = \mathscr{L}_\tau u , \quad u_\tau(x, t_0) = u_0(x) , \tag{3}$$

где

$$\mathscr{L}_\tau = \alpha_1(t, \tau) \mathscr{L}_1 + \alpha_2(t, \tau) \mathscr{L}_2 + \ldots + \alpha_p(t, \tau) \mathscr{L}_p , \tag{4}$$

$$\alpha_i(t, \tau) = p\delta_{ij} , \quad \text{если} \quad t \in \left(\left(n + \frac{j-1}{p}\right)\tau, \left(h + \frac{j}{p}\right)\tau\right] , \tag{5}$$

δ_{ij} – символ Кронекера; $i, j = 1, \ldots, p$.

В работах [1–3] исследовались задачи (1, 1a), (3) в предположении, что каждая из задач

$$\frac{\partial u}{\partial t} = p\mathscr{L}_i u , \quad u(x, t_0) = u_0(x) ; \quad i = 1, \ldots, p \tag{6}$$

равномерно корректна в некотором банаховом пространстве B. Мы покажем, что можно освободиться от этого требования. Для простоты мы ограничимся случаем однородных операторов $\mathscr{L}, \mathscr{L}_i$, т. е. будем предполагать их перестановочность с операторами сдвига (но не между собой):

$$\mathscr{L}T_j = T_j\mathscr{L}\,, \quad \mathscr{L}_iT_j = T_j\mathscr{L}_i\,; \quad i = 1, \ldots, p\,, \quad j = 0, \ldots, m\,, \tag{7}$$

где операторы сдвига T_0, T_j по t, x определяются равенствами:

$$\begin{gathered} T_0 f(x, t) = f(x, t + \tau)\,, \\ T_i f(x_1, \ldots, x_m, t) = f(x_1, \ldots, x_i + h_i, \ldots, x_m, t)\,. \end{gathered} \tag{8}$$

В этом случае гармоники

$$u(x, t) = v(k, t)\, e^{i(k_1x_1 + \ldots + k_mx_m)} = v(k, t)\, e^{ikx} \tag{9}$$

являются собственными функциями операторов $\mathscr{L}, \mathscr{L}_i$, пространство B становится пространством Гильберта периодических функций и возможно преобразование Фурье задач (1, 1а), (3), (6) после которого приходим к задачам

$$\frac{\partial v(k, t)}{\partial t} = lv(k, t)\,, \quad v = (k, t_0) = v_0(k)\,, \tag{10}$$

$$\frac{\partial v_\tau(k, t)}{\partial t} = l_\tau\, v(k, \tau)\,, \quad v = (k, t_0) = v_0(k)\,, \tag{11}$$

$$\frac{\partial v(k, t)}{\partial \tau} = l_s\, v(k, t)\,, \quad (k, t_0) = v_0(k)\,; \quad s = 1, \ldots, p\,, \tag{12}$$

где l, l_τ, l_s – Фурье-образы операторов $\mathscr{L}, \mathscr{L}_\tau, \mathscr{L}_s$, которые являются $q \times q$ матрицами в пространстве E_q компонент $\{u_1, \ldots, u_q\}$ зависящими от k.

Введем обозначения (см. [3]):

$$s(t_2 - t_1)\,, \quad s_\tau(t_2 - t_1)\,, \quad s_i(t_2 - t_1) \tag{13}$$

для операторов перехода задач (1, 1а), (3), (6),

$$\sigma(t_2 - t_1)\,, \quad \sigma_\tau(t_2 - t_1)\,, \quad \sigma_i(t_2 - t_1) \tag{14}$$

для операторов перехода задач (10), (11), (12) соответственно. Очевидны соотношения

$$\sigma(t) = e^{lt}\,, \quad \sigma_i = e^{l_i t}\,, \quad \sigma_\tau = e^{l_p\tau} e^{l_{p-1}\tau} \ldots e^{l_1\tau}\,, \quad i = 1, \ldots, p\,, \tag{15}$$

где $e^{\boldsymbol{A}} = \sum_{k=0}^{\infty} (\boldsymbol{A}^k/k!)$ есть экспоненциал матрицы $\boldsymbol{A}$.

Дадим эффективное определение корректности задач (1, 1a), (3), (6). Задача (3) корректна, если

$$(16) \qquad \|s_\tau(m\tau)\| = \sup_k \|\sigma_\tau(m\tau)\|_q = \sup \|\sigma_\tau^m(\tau)\|_q \leqq M(T)$$

для всех m, τ удовлетворяющих условию $m\tau \leqq T$; равномерно корректна, если

$$(17) \qquad \|s_\tau(m\tau)\| \leqq l^{\alpha(T)m\tau}\,.$$

Здесь $\|f\|_q$ означает норму вектора $f = \{f, \ldots, f_q\}$. Аналогично определяется корректность (1, 1a), (6). В дальнейшем мы будем всегда предполагать корректность (3), но не обязательно корректность (1, 1a) и (6).

Справедливы следующие утверждения.

Лемма 1. $\|\sigma_\tau(\tau) - \sigma(\tau)\|_q \leqq c(k)\,\tau^2\,, \quad \tau \to 0\,.$

Лемма 2. *Имеет место аппроксимация*

$$(18) \qquad \|[s_\tau(\tau) - s(\tau)]\,u_0\| \leqq \tau^2\,c(N)$$

для

$$(19) \qquad u_0(x) = P_N(x) = \sum_{k=-N}^{N} v(k)\,e^{ikx}\,.$$

Лемма 3.

$$(20) \qquad \sigma_\tau(n\tau) = \sigma_\tau^n(\tau) \to \sigma(\tau) = e^{lt}\,, \quad \tau \to 0\,, \quad n\tau = t\,,$$

k — *фиксировано.*

Теорема 1. *Если задача* (1, 1a) *корректна, то для сходимости в сильном смысле*:

$$(21) \qquad \|[s_\tau(\tau) - s(\tau)]\,u_0\| \to 0\,, \quad \tau \to 0\,,$$

где $u_0 \in L_2$, *необходимо и достаточно, чтобы* (3) *была корректна.*

Теорема 2. *Если корректна задача* (5), *то корректна задача* (1, 1a) *и имеет место сильная сходимость в смысле* (21).

Теорема 3. *Пусть условие* (2) *заменено на условие аппроксимации*

$$(22) \qquad \mathscr{L} \sim \mathscr{L}_1 + \mathscr{L}_2 + \ldots + \mathscr{L}_p\,,$$

где операторы $\mathscr{L}_1, \ldots, \mathscr{L}_p$ могут зависеть от τ, а апроксимация имеет место по Лаксу.

Тогда справедливы теоремы 1, 2.

Теорема 4. *Пусть*

$$\Lambda_{s_1} + \Lambda_{s_0} = \mathscr{L}_s, \quad s = 1, \ldots, p \tag{23}$$

и выполняется условие (2).

Если схема

$$\frac{u^{n+(s/p)} - u^{n+((s-1)/p)}}{\tau} = \Lambda_{s_1} u^{n+(s/p)} + \Lambda_{s_0} u^{n+((s-1)/p)} \tag{24}$$

устойчива на целых шагах, то решение (24) *сходится в B к решению* (1).

Литература

[1] *Н. Н. Яненко:* Сибирский математический журнал, т. V, № 6 (1964).
[2] *Г. В. Демидов, Н. Н. Яненко:* ДАН СССР, т. *167*, № 6 (1966).
[3] *Н. Н. Яненко:* Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики, Новосибирск, 1966.

Н. Н. Яненко, Вычислительный центр СОАН, Новосибирск 90, СССР.