Aleksander Andreevich Samarskij

Об устойчивости операторно-разностных схем

*Aplikace matematiky*, Vol. 13 (1968), No. 2, 181--186

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/103153

# ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ОПЕРАТОРНО-РАЗНОСТНЫХ СХЕМ

А. А. САМАРСКИЙ

**1.** Изучаются операторно-разностные схемы с операторами, действующими в вещественном унитарном пространстве (любого числа измерений). Найдены необходимые и достаточные условия устойчивости для двухслойных схем и достаточные условиях для трехслойных схем. Эти условия, имеющие вид линейных операторных неравенств, выделяют классы устойчивых схем, которым, в частности, принадлежат схемы для эволюционных уравнений математической физики. Запись схем в канонической форме позволяет указать операторы $R$, ответсвенные за устойчивость. Достаточные условия устойчивости накладывают слабые органичения на произвол в выборе операторов $R$ (регуляризаторов). Меняя $R$ и оставаясь при этом в классе устойчивых схем, можно получать схемы, обладающие заданными свойствами (по точности и объему вычислительной работы). Методом энергетических неравенств получены априорные оценки для решения операторно-разностной задачи Коши. При этом мы стремились оценить решение задачи в возможно более сильной норме через правую часть в возможно более слабой норме.

**2.** Пусть $\{H_N\}$ $(N = 1, 2, \ldots; N \to \infty)$ последовательность линейных нормированных пространств (являющихся аналогом пространств сеточных функций, определенных на сетках $\omega_h$ в евклидовом пространстве $x = (x_1, \ldots, x_p)$. Пусть $y_{N,\tau}(t)$ – абстрактная функция дискретного аргумента $t \in \varpi_\tau$ со значениями в $H_N$, где $\varpi_\tau = \{t = j\tau; j = 0, 1, \ldots, j_0\}$ – сетка с шагом $\tau$ на отрезке $0 \leqq t \leqq t_0$, $A(t) = A_{N,\tau}(t)$, $B(t) = B_{N,\tau}(t)$, $R = R_{N,\tau}(t)$ и т.д. – линейные (аддитивные и однородные) операторы, отображающие при каждом $t \in \varpi_h$ пространство $H_N$ на $H_N$. Под двухслойной (трехслойной) операторно-разностной схемой понимается операторное уравнение, связывающее для каждого $t \in \varpi_h$ две точки $y_{N,\tau}(t+\tau)$ и $y_{N,\tau}(t)$ (три точки $y_{N,\tau}(t + \tau)$, $y_{N,\tau}(t)$ и $y_{N,\tau}(t - \tau)$) пространства $H_N$.

Отправным пунктом исследования является каноническая форма записи схем. Любую двухслойную схему можно записать в канонической форме (индексы $N$, $\tau$ опускаем)

$$(1) \qquad B(t)\,\frac{y(t + \tau) - y(t)}{\tau} + A(t)\,y(t) = \varphi(t)\,, \quad 0 \leqq t = j\tau \leqq t_0\,, \quad y(0) = y_0\,,$$

а трехслойную схему — в канонической форме

$$(2)\qquad B(t)\frac{y(t+\tau)-y(t-\tau)}{2\tau}+R(t)\left[y(t+\tau)-2y(t)+y(t-\tau)\right]+$$
$$+A(t)\,y(t)=\varphi(t)\,,\quad 0\leqq t=j\tau\leqq t_0\,,\quad y(0)=y_0\,,\quad y(\tau)=y_1\,;$$

здесь $y(t)$ — искомая функция, $\varphi(t)=\varphi_{N,\tau}(t)$ — заданная абстрактная функция со значениями в $H_N$, $y_0=y_{0,N,\tau}$ и $y_1=y_{1,N,\tau}$ — заданные точки (векторы) в $H_N$.

**3.** Устойчивость схем (1) и (2) определяется как свойство равностепенной по $N,\tau$ непрерывности $\{y_{N,\tau}\}$ последовательности решений задач (1) и (2) относительно исходных данных $\{\varphi_{N,\tau}(t)\}$, $\{y_{N,\tau}(0)\}$, $\{y_{N,\tau}(\tau)\}$. Вводя на линейном множестве $H_N$ различные нормы $\|\cdot\|_{(1)}$, $\|\cdot\|_{(2)}$ и т.д., получим различные нормированные пространства, состоящие из элементов $H_N$. Полнота $H_N$ не предполагается. Будем говорить, что схема (1) (схема (2)) устойчива, если можно указать такие числа $\tau_0>0$ и $N_0>0$, что при любых $\varphi(t)\in H_N$ и $y(0)\in H_N$ ($y(\tau)\in H_N$) и при $\tau\leqq\tau_0$, $N\geqq N_0$, для решения задачи (1) (или (2)) имеет место одна из оценок:

$$(3)\qquad \|y(t+\tau)\|_{(1)}\leqq M_1\|y(0)\|_{(1)}+M_2\max_{0\leqq t'\leqq t}\|\varphi(t')\|_{(2)}\,,$$

$$(4)\qquad \|y(t+\tau)\|_{(1)}\leqq M_1\|y(0)\|_{(1)}+M_2\max_{0\leqq t'\leqq t}\left[\|\varphi(t')\|_{(2)}+\|\varphi_{\bar t}(t')\|_{(2)}\right],$$

где $M_1$ и $M_2$ — положительные числа, не зависящие от $\tau$ и $N$, $\varphi_{\bar t}=(\varphi(t')-$ $-\varphi(t'-\tau))/\tau$. Для трехслойной схемы (2) оценки (3) и (4) принимают вид:

$$(5)\qquad \|y(t+\tau)\|_{(1)}\leqq M_1\|y(\tau)\|_{(1)}+M_2\max_{0<t'\leqq t}\|\varphi(t')\|_{(2)}\,,$$

$$(6)\qquad \|y(t+\tau)\|_{(1)}\leqq M_1\|y(\tau)\|_{(1)}+M_2\max_{0<t'\leqq t}\left[\|\varphi(t')\|_{(2)}+\|\varphi_{\bar t}(t')\|_{(2)}\right],$$

причем $\|y(t+\tau)\|^2_{(1)}=\|y(t+\tau)+y(t)\|^2_{(1_1)}+\|y(t+\tau)-y(t)\|^2_{(1_2)}$, где $\|\cdot\|_{(1_1)}$ и $\|\cdot\|_{(1_2)}$ — некоторые нормы на $H_N$. Если схема устойчива при любых $\tau>0$, $N>0$, то она называется абсолютно устойчивой.

**4.** В дальнейшем будем предполагать, что $H_N$ вещественное унитарное пространство со скалярным произведением $(.,.)_N$ и нормой $\|y\|_N=\sqrt{(y,y)_N}$ (индекс $N$ всюду опускаем). Ставится задача: выявить запас информации относительно операторов $B,R$ и $A$, достаточный для устойчивости схем (1) и (2) и найти априорные оценки вида (3)—(6). Выделим исходные семейства схем. Схема (1) принадлежит исходному семейству двухслойных схем ИС-2, если:

α) $A(t)$ самосопряжен и положителен ($A^*=A$, $A>0$, т.е. $A(x,x)>0$ для всех $x\in H_N$, $x\neq 0$).

β) $B(t)>0$.

γ) $A(t)$ липшиц-непрерывен по $t$, то есть

$$|(A(t+\tau)x, x) - (A(t)x, x)| \leqq C_0(A(t)x, x),$$

где $C_0 = \text{const} > 0$ не зависит от $\tau$ и $N$. Схема (2) принадлежит исходному семейству ИС-3, если $A(t)$ и $R(t)$ удовлетворяют условиям α) и γ). Устойчивые схеми будем искать в ИС-2 и ИС-3. Нормы $\|.\|_{(1)}$ и $\|.\|_{(2)}$, вообще говоря, зависят от $t$, например

$$\|y\|_{(1)} = \|y\|_{(1,t)} = \sqrt{(A(t)y, y)} \quad \text{и т.д.}$$

Для упрощения изложения формулируем результаты в предположении, что операторы $A$, $B$, $R$ постоянные, т.е. не зависят от $t$. Условимся писать $B \geqq A$, если $(Bx, x) \geqq (Ax, x)$ для всех $x \in H_N$.

**5.** Формулируем теоремы об устойчивости для двухслойных схем.

**Теорема 1.** *Схема* (1) *из ИС*-2 *устойчива при*

$$B \geqq 0{,}5\tau(1 - c_1\tau)A, \quad c_1 > 0.$$

*Для решения задачи* (1) *при* $\tau \leqq \tau_0$, $\tau_0 < 1/4C_1$ *верна оценка* (4), *где*

$$\|y\|_{(1)} = \|y\|_a = \sqrt{(Ay, y)}, \quad \|\varphi\|_{(2)} = \|\varphi\|_{a^{-1}} = \sqrt{(A^{-1}\varphi, \varphi)}.$$

*Если* $B^* = B$, *то имеет место оценка* (3) *с*

$$\|y\|_{(1)} = \|y\|_b, \quad \|\varphi\|_{(2)} = \|\varphi\|_{b^{-1}}.$$

*Если* $B \geqq 0{,}5\tau A$, *то схема* (1) *абсолютно устойчива.*

**Теорема 2.** *Условие*

$$B > 0{,}5\tau(1 - c_1\tau^\gamma)A > 0, \quad 0 \leqq \gamma < 1,$$

*где* $\gamma$ *не зависит от* $\tau$ *и* $N$, *необходимо для устойчивости исходного семейства ИС*-2 *схем* (1).

**Теорема 3.** *Если выполнено условие*

$$B \geqq \varepsilon E + 0{,}5\tau A, \quad 0 < \varepsilon \leqq 1,$$

*то для* (1) *верна оценка* (3) *с* $\|y\|_{(1)} = \|y\|_a$, $\|\varphi\|_{(2)} = \|\varphi\|_{a^{-1}}$ *при любых* $\tau > 0$. (*Здесь* $E$ — *единичный оператор.*) *Схему* (1) *удобно записать в другом виде, положив* $B = E + \tau R$. *Тогда достаточное условие* $B \geqq 0{,}5\tau A$ *устойчивости для* (1) *примет вид*

$$R \geqq \sigma_0 A, \quad \sigma_0 = \frac{1}{2} - \frac{1}{\tau\|A\|}. \tag{7}$$

Общие теоремы 1 и 3 позволяют получить априорные оценки для схемы с весами

$$(8)\qquad y_t + A(t)\left[\sigma\hat{y} + (1-\sigma)\,y\right] = \varphi\,, \quad y(0) = y_0\,,$$

где $\hat{y} = y(t+\tau)$, $y = y(t)$, $\varphi = \varphi(t)$, $y_t = (\hat{y} - y)/\tau$, $\sigma$ — вещественный параметр. Приводя (8) к каноническому виду (1), находим $B = E + \sigma\tau A$, $R = \sigma A$. Достаточное условие (7) имеет вид $\sigma \geqq \sigma_0$. Укажем два результата для схемы (8): 1) если $A(t) > 0$ несамосопряженный оператор и $\|Ax\|^2 < \Delta(Ax, x)$, $\Delta > 0$, то (8) абсолютно устойчива при $\sigma \geqq 0{,}5 - 1/\tau\Delta$ и для (8) верна оценка (4), где $\|y\|_{(1)} = \|y\|$, $\|\varphi\|_{(2)} = \|A^{-1}\varphi\|$, $\|\varphi_{\bar{t}}\|_{(2)} = \|(A^{-1}\varphi)_{\bar{t}}\|$; 2) если $A^*(t) = A(t) > 0$ и $\sigma \geqq \sigma_\varepsilon$, $\sigma_\varepsilon = 0{,}5 - (1/\tau\|A\|)$, то для (8) при любых $\tau > 0$ верна оценка (3) с $\|y\|_{(1)} = \|y\|$, $\|\varphi\|_{(2)} = \sqrt{(A^{-1}\varphi, \varphi)}$.

**6.** Достаточные условия устойчивости трехслойных схем.

**Теорема 4.** *Если выполнены условия*

$$B \geqq 0\,, \quad R \geqq \tfrac{1}{4}A\,,$$

*то схема* (2) *за ИС*-3 *абсолютно устойчива и для решения задачи* (2) *верна оценка* (6), *где*

$$(9)\qquad \begin{aligned} \|y(t+\tau)\|^2_{(1)} &= \|\hat{y}\|^2_{(1)} = \|\hat{y} + y\|^2_a + \tau^2\left((R - \tfrac{1}{4}A)\,y_t, y_t\right), \\ \|y\|^2_a &= (Ay, y)\,, \quad \|\varphi\|^2_{(2)} = (A^{-1}\varphi, \varphi)\,. \end{aligned}$$

**Теорема 5.** *Если выполнены условия*

$$B \geqq \varepsilon E \quad (\varepsilon > 0 \text{ — любое}) \quad \text{и} \quad R \geqq \tfrac{1}{4}A\,,$$

*то для* (2) *верна оценка* (5), *где* $\|y(t+\tau)\|^2_{(1)}$ *имеет вид* (9), *а* $\|\varphi\|_{(2)} = \|\varphi\|$.

Рассмотрим в качестве примера схему с весами

$$(10)\qquad \frac{\hat{y} - \check{y}}{2\tau} + A[\sigma_1\hat{y} + (1 - \sigma_1 - \sigma_2)\,y + \sigma_2\check{y}] = \varphi\,, \quad \check{y} = y(t-\tau)\,.$$

Записывая ее в виде (2), находим $B = E + (\sigma_1 - \sigma_2)\,\tau A$, $R = \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2)\,A$. Для устойчивости (10) достаточно, чтобы $\sigma_1 \geqq \sigma_2$, $\sigma_1 + \sigma_2 \geqq 0{,}5$. Теоремы 4 и 5 позволяют получить ряд априорных оценок для (10). Так, например, если $A(t) > 0$ несамосопряженный оператор, то для (10) верна оценка (3) (при любых $\tau > 0$) с $\|\hat{y}\|^2_{(1)} = \frac{1}{4}\|\hat{y} + y\|^2 + \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2 - \frac{1}{2})\,\|\hat{y} - y\|^2$, $\|\varphi\|_{(2)} = \|\varphi\|$, если выполнены условия $\sigma_1 \geqq \sigma_2$, $\sigma_1 + \sigma_2 \geqq 0{,}5$.

При изучении устойчивости для конкретных разностных схем, аппроксимирующих уравнения математической физики, необходимо привести рассматриваемую схему к каноническому виду (1) или (2), ввести пространство сеточных функций $H_N$ со скалярным произведением, проверить принадлежность схемы к ИС-2 или ИС-3, а также выполнение достаточных условий устойчивости (например, в виде $R > \sigma_0 A$ для (1), $R \geqq \frac{1}{4}A$ для (2)) и, наконец, воспользоваться одной из теорем 1,2,4 или 5.

**7.** В заключение остановимся на вопросе об устойчивости аддитивных схем. Под аддитивной схемой понимается система операторных уравнений

$$\sum_{\beta=1}^{m} C_{\alpha\beta}(t)\, y_\beta(t) = D_\alpha(t)\, y(t) + \tau\, \varphi_\alpha(t)\,, \quad (\alpha = 1, 2, \ldots, m)\,,$$
$$0 \leqq t = j\tau \leqq t_0\,, \quad y(0) = y_0 \in H_N\,, \tag{11}$$

осуществляющих переход со „слоя" $t = j\tau$ на слой $t = (j+1)\tau$, так что $y_m(t) = y(t+\tau)$, а $y_1, y_2, \ldots, y_{m-1}$ — промежуточные значения. Здесь $C_{\alpha\beta}$, $D_\alpha$ — линейные операторы из $H_N$ в $H_N$. Погрешность аппроксимации $\psi$ аддитивной схемы определяется как сумма погрешностей аппроксимации $\psi_\alpha$ для промежуточных уравнений (11) номера $\alpha = 1, 2, \ldots, m$ ($\psi = \psi_1 + \psi_2 + \ldots + \psi_n$). В связи с таким определением аппроксимации аддитивной схеми необходимы априорные оценки, ориентированные на использование свойства суммарной аппроксимации. Приведем одну теорему для регулярной аддитивной схемы вида

$$B\,\frac{y_\alpha(t) - y_{\alpha-1}(t)}{\tau} + \sum_{\beta=1}^{m} A_{\alpha\beta}(t)\, y_\beta(t) = \varphi_\alpha(t)\,,$$
$$\alpha = 1, 2, \ldots, m\,, \quad y(0) = y_0\,.$$

Будем предполагать, что $H_N$ вещественное унитарное пространство, $B$ — постоянный оператор.

**Теорема 6.** *Пусть выполнены условия*: 1) $B^* = B > 0$, 2) *матрица-оператор* $A = (A_{\alpha\beta})$ *неотрицательна, то есть* $\sum_{\alpha,\beta=1}^{m} (A_{\alpha\beta}\xi_\beta, \xi_\alpha) \geqq 0$ *для любых* $\xi_\alpha \in H_N$. *Тогда схема* (11) *абсолютно устойчива и для нее верна априорная оценка*

$$\|y(t+\tau)\|_{(1)} \leqq M_1 \|y(0)\|_{(1)} + M_2 \max_{0 \leqq t' \leqq t} \Big[\|\varphi(t')\|_{(2)} + \sqrt{\tau} \sum_{\alpha=1}^{m} \|\varphi_\alpha\|_{(2)}\Big]\,, \tag{12}$$

*где*

$$\|y\|_{(1)} = \sqrt{(By, y)}\,, \quad \|\varphi\|_{(2)} = \sqrt{(B^{-1}\varphi, \varphi)}\,, \quad \varphi = \sum_{\alpha=1}^{m} \varphi_\alpha\,.$$

Из (12) и суммарной аппроксимации (например, вида $\psi = \psi_1 + \psi_2 + \cdots + \psi_m = O(\tau^K + h_N^K)$ следует сходимость аддитивной схемы.

Доложительные сведения и ссылки, относящиеся к рассматриваемому кругу вопросов, можно найти в [2]–[4].

*Литература*

[1] *В. С. Рябенький, А. Ф. Филиппов:* Об устойчивости разностных уравнений, М., Гостехиздат, 1956.

[2] *А. А. Самарский:* К теории разностных схем. Докл. АН СССР, 1965, *165*, № 5, 1007—1011.

[3] *А. А. Самарский:* Некоторые вопросы теории разностных схем. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1966, *6*, № 4, 665—686.

[4] *А. А. Самарский:* О регуляризации разностных схем. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1967, *7*, № 1, 62—93.

*А. А. Самарский,* Институт прикладной математики АН СССР, Миюская пл. 4, Москва А-47, СССР.