Aplikace matematiky

Jiří Taufer

Faktorisierungsmethode für ein Randwertproblem eines nichtlinearen Systems von Differentialgleichungen

Aplikace matematiky, Vol. 13 (1968), No. 2, 201--202

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/103157

FAKTORISIERUNGSMETHODE FÜR EIN RANDWERTPROBLEM EINES NICHTLINEAREN SYSTEMS VON DIFFERENTIALGLEICHUNGEN

J. TAUFER

Wir suchen einen solchen Vektor $\boldsymbol{x}(t)$ vom Typus $(N, 1)$, dass gilt

1. $\boldsymbol{x}'(t) = \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x}(t)),\ t \in \langle a, b\rangle$,
2. $\boldsymbol{U}\boldsymbol{x}(a) = \boldsymbol{u}$ und $\boldsymbol{V}\boldsymbol{x}(b) = \boldsymbol{v}$

wobei $\boldsymbol{U}$ und $\boldsymbol{V}$ Matrizen vom Typus (n, N) und (m, N) sind.

Satz. *Es sei $\boldsymbol{c}(t)$ die Lösung der Gleichung*

$$\boldsymbol{c}'(t) = \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{c}(t))$$

und es gelte

$$\boldsymbol{U}\,\boldsymbol{c}(a) = \boldsymbol{u}\,.$$

Die Funktion $\boldsymbol{g}(t, \boldsymbol{x})$ sei die Lösung folgender Gleichungen.

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial g_i}{\partial x_j} f_j + \frac{\partial g_i}{\partial t} = \sum_{j=1}^{n} Z_{ij} g_j\,, \quad i = 1, \ldots, n \tag{1}$$

mit den Anfangsbedingung

$$\boldsymbol{g}(a, \boldsymbol{x}) = \boldsymbol{U}\boldsymbol{x} - \boldsymbol{u}\,,$$

wobei $Z_{ij}(t, \boldsymbol{x})$ beliebige geneigend glatte Funktionen sind. Dann gilt

$$\boldsymbol{g}(t, \boldsymbol{x}(t)) = 0 \quad \text{für} \quad t \in \langle a, b\rangle\,.$$

Mit Hilfe dieses Satzes können wir die Bedingungen auf dem Intervall verschieben. Wir bezeichnen

$$\boldsymbol{G}(t, \boldsymbol{x}_0) = \left\| \frac{\partial g_i}{\partial x_j} \right\| (t, x_0)\,.$$

Für eine feste Funktion $\mathbf{x}_0(t)$, welche die Gleichung $\mathbf{x}' = \mathbf{f}(t, \mathbf{x})$ erfüllt, sind die Matrizen $\mathbf{G}$ und $\mathbf{g}$ Faktorisierungsmatrizen eines bestimmten linearen Problems. Anstatt der Gleichungen (1), lösen wir gewisse Faktorisierungsgleichungen, welche die Matrix $\mathbf{G}(t, \mathbf{x}_0)$ und den Vektor $\mathbf{g}(t, \mathbf{x}_0)$ geben. Um das endgültige Ergebnis zu erzielen, müssen wir irgendwelche Iterationsverfahren enwenden. Anstatt der partiellen Differentialgleichungen (1), lösen wir gewähnliche Differentialgleichungen. Die Ungenauigkeiten, welche während der numerischen Realisierung des Algorithmen entstehen, können wir uns als Ungenauigkeiten der Koeffizienten der ursprünglichen Aufgabe vorstellen.