Rostislav Zezula

Numerische Stabilität eines Algorithmus zur Berechnung des Eigenparameters eines Matrizenoperators mit Hilfe der Reduktionsmethode und der Banachschen Iteration

Aplikace matematiky, Vol. 13 (1968), No. 2, 211--216

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/103160`

NUMERISCHE STABILITÄT EINES ALGORITHMUS ZUR BERECHNUNG DES EIGENPARAMETERS EINES MATRIZENOPERATORS MIT HILFE DER REDUKTIONSMETHODE UND DER BANACHSCHEN ITERATION

R. ZEZULA

Einige Probleme der Reaktorphysik [1] führen auf folgendes gemischte elliptische Randwertproblem (mit dem kleinsten Eigenwert B^2)

$$(1)\qquad \Delta\varphi + B^2\varphi = 0\,; \quad \varphi(R, z; B^2) = \varphi\left(r, \pm\frac{H}{2}; B^2\right) = 0\,; \quad \left.\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right|_{r=a} = K_0\varphi|_{r=a}$$

auf dem zweidimensionalen rechteckigen abgeschlossenen Gebiet

$$(1a)\qquad \Omega = J_r \times J_z\,; \quad J_r \equiv \{r \mid a \leqq r \leqq R\}\,; \quad J_z \equiv \left\{z \;\middle|\; -\frac{H}{2} \leqq z \leqq \frac{H}{2}\right\}$$

mit der Grenze $\dot{\Omega}$ und mit der äusseren Normale $n = n(\dot{\Omega})$. Dabei kann der Operator K_0 durch die Beziehung

$$(1b)\qquad K_0\varphi|_{r=a} \equiv [\vartheta(z) + \varepsilon N_2]\varphi|_{r=a}$$

approximiert werden, wo $\vartheta(z) \in L^2(-\frac{1}{2}H, \frac{1}{2}H)$ gegebene begrenzte (im allgemeinen unstetige) Funktion, N_2 gegebener begrenzter (im allgemeinen nicht selbstadjungierter) Operator im Hilbertschen Raume $L^2(\Omega)$ und ε ein kleiner Parameter ist.

Die Konstruktion einer schwachen Lösung des Problems (1) kann (unter gewissen Voraussetzungen [2]) auf die äquivalente Aufgabe der Bestimmung des Eigenparameters $B^2 = \lambda^* \in \langle\lambda_1, \lambda_2\rangle$ (λ_1, λ_2 gegeben) und des zu ihm gehörigen normierten Eigenvektors $y = y(\lambda^*) = (1, x(\lambda^*)) \in l^2$ des homogenen unendlichen Systems der linearen Gleichungen

$$(2)\qquad A(\lambda)\, y = 0\,; \quad A(\lambda) = \begin{pmatrix} a_{11}(\lambda) & -c(\lambda) \\ -b(\lambda) & D(\lambda) \end{pmatrix}$$

im reellen Hilbertschen Folgenraum l^2 überführt werden, die man unter gewissen Voraussetzungen [2] über den Matrizenoperator $A(\lambda)$ im Raume l^2 (welche die Tatsache ausdrücken, dass aus physikalischen Gründen nur das Matrizenelement $a_{11}(\lambda)$ vom Parameter $\lambda \in \langle \lambda_1, \lambda_2 \rangle$ stark abhängig ist) mit Hilfe der Reduktionsmethode und der Banachschen Iteration durch den folgenden Algorithmus lösen kann:

Wir wählen einen passenden Ausgangswert $\lambda_N^{(0)} \in \langle \lambda_1, \lambda_2 \rangle$ des Parameters $B^2 = \lambda$. Es sei weiter für jedes $\lambda \in \langle \lambda_1, \lambda_2 \rangle$ und jedes $k = 1, 2, 3, \ldots$

$$\text{(2a)} \qquad b_k(\lambda) = P_k\, b(\lambda)\,; \quad D_k(\lambda) = P_k\, D(\lambda)\, P_k\,; \quad c_k(\lambda) = P_k\, c(\lambda)$$

wo P_k den Projektor bedeutet, der den Hilbertschen Raum l^2 auf seinen n-dimensionalen Unterraum l_n^2 projiziert. Bei festem $k \geqq N$ berechnen wir den angenäherten Eigenparameter $\lambda_k = \lim_{m \to \infty} \lambda_k^{(m)}$ mit Hilfe der Banachschen Iteration aus den Beziehungen

$$\text{(3)} \qquad \lambda_k^{(m+1)} = h[(c, x_k^{(k)}(\lambda_k^{(m)}))]\,; \quad \lambda_{k+1}^{(0)} = \lambda_k\,; \quad \lambda_N^{(0)} \in \langle \lambda_1, \lambda_2 \rangle$$

$$\text{(4)} \qquad D_k(\lambda_k^{(m)})\, x_k^{(k)}(\lambda_k^{(m)}) = b_k(\lambda_k^{(m)})$$

wo $h(a_{11})$ die inverse Funktion zur Funktion $a_{11}(\lambda)$ ist, so dass für jedes $\lambda \in \langle \lambda_1, \lambda_2 \rangle$ gilt:

$$\text{(5)} \qquad h[a_{11}(\lambda)] = \lambda\,.$$

Weiter berechnen wir mit Hilfe der Reduktionsmethode, d. h. aus der Beziehung (4) für $\lambda_k = \lim_{m \to \infty} \lambda_k^{(m)}$, $k = N, N+1, \ldots$ die angenäherten Eigenvektoren $y_k = (1, x_k^{(k)}(\lambda_k))$, die unter gewissen Voraussetzungen [2] schwach konvergieren für $k \to \infty$ zum Eigenvektor $y(\lambda^*)$ des Matrizenoperators $A(\lambda^*)$, d. h. wir haben

$$\text{(6)} \qquad y(\lambda^*) = (1, x(\lambda^*))\,; \quad \lambda^* = \lim_{k \to \infty} \lambda_k\,;$$

$$x_k^{(k)}(\lambda_k) = [D_k(\lambda_k)]^{-1} b_k(\lambda_k) \to x(\lambda^*) \in l^2\,, \quad A(\lambda^*)\, y(\lambda^*) = 0\,.$$

Die Verifizierung der (verhältnissmässig komplizierten) Voraussetzungen, die die Konvergenz des durch die Beziehungen (3), (4) gegebenen Algorithmus sichern, erfordert im Wesentlichen die Abschätzung von zwei Zahlen $\alpha = \alpha(A)$, $\alpha_0^* = \alpha_0^*(A)$ zu überprüfen

$$\text{(7)} \qquad 0 < \alpha < 1\,; \quad 0 < \alpha_0^* < 1$$

die vom Operator A abhängig sind und von denen die erste die Konvergenz der Banachschen Iteration (3) für $\lambda_k = \lim \lambda_k^{(m)} \in \langle \lambda_1, \lambda_2 \rangle$ und dadurch auch die Existenz des Eigenparameters $\lambda^* = \lim\inf \lambda_k \in \langle \lambda_1, \lambda_2 \rangle$ und die zweite die Konvergenz der Neumannschen Reihe für den inversen Operator $D^{-1}(\lambda)$ für alle $\lambda \in \langle \lambda_1, \lambda_2 \rangle$ und dadurch auch die Möglichkeit der Durchführung der Reduktionsmethode (4) für alle $k \geqq N$, $\lambda \in \langle \lambda_1, \lambda_2 \rangle$ sichert.

Für die praktische Berechnung ist wichtig die Frage nach der numerischen Stabilität der Folge von numerischen Prozessen, die dem von uns betrachteten Algorithmus

(3), (4) zur Lösung des homogenen unendlichen Systems von linearen Gleichungen (2) entspricht. Dabei nehmen wir den Begriff der numerischen Stabilität, der α_k-Folge von numerischen Prozessen u. s. w. (sowie womöglich auch die entsprechenden Bezeichnungen) im Sinne des Buches [3]. Die Hauptidee im Beweise der numerischen Stabilität des Algorithmus (3), (4) ist die Ausnützung der bekannten Tatsachen [2] vom Operator $D_k(\lambda)$, $D_k^{-1}(\lambda)$, vom Vektor $c_k(\lambda)$, $b_k(\lambda)$ und von der Funktion $a_{11}(\lambda)$ für $\lambda \in \langle\lambda_1, \lambda_2\rangle$. Wir haben [2] (S. 78)

$$(8) \qquad D(\lambda) = D_0 + (\lambda - \lambda_0)\, S^{(1)}(\lambda) = D(\lambda_0) + (\lambda - \lambda_0)\left[S^{(1)}(\lambda) + \varepsilon S^{(2)}(\lambda)\right]$$

wo

$$(\lambda - \lambda_0)\, S^{(1)}(\lambda) = N_1^{(0)}(\lambda) - N_1^{(0)}(\lambda_0)\,; \quad (\lambda - \lambda_0)\, S^{(2)}(\lambda) = N_2^{(0)}(\lambda) - N_2^{(0)}(\lambda_0)$$

$$N_1^{(0)} = (J - P_1)\, N_1(J - P_1)\,; \quad N_2^{(0)} = (J - P_1)\, N_2(J - P_1)$$

$$N_1 \varphi_k = \frac{1}{k} \cdot \frac{H}{\pi} \cdot \frac{\partial}{\partial r}\, \varphi_k\big|_{r=a}\,; \quad (k = 1, 2, \ldots)\,;$$

$$\Delta\varphi_k(r, z; B^2) + B^2 \varphi_k(r, z; B^2) = 0\,; \quad \varphi_k(R, z; B^2) = \varphi_k(r, \pm\tfrac{1}{2}H; B^2) = 0\,.$$

Weiter gelten für alle $k \geqq N$, $\lambda \in \langle\lambda_1, \lambda_2\rangle$ die Abschätzungen [2] (S. 73; 75)

$$(9) \qquad \|D_k^{-1}(\lambda)\| \leqq \frac{1}{c_3^* + \vartheta_{\min}^* - \varepsilon c_2^*}\,; \quad \|D^{-1}(\lambda)\| \leqq \frac{1}{c_3^* + \vartheta_{\min}^* - \varepsilon c_2^*}$$

wo

$$\alpha_i = i\,\frac{\pi}{H}\,; \quad (i = 1, 2, \ldots)\,; \quad \vartheta_m^*(t) = \frac{2}{H\alpha_m}\,\vartheta(t) < 0\,; \quad 0 \leqq \vartheta_{\min}^* \leqq |\vartheta_m^*(t)| \leqq \vartheta_{\max}^*$$

$$N_1^{(0)}(\lambda) = (z_{mm}^{(1)}(\lambda)\,\delta_{lm})\,; \quad N_2^{(0)}(\lambda) = (z_{ml}^{(2)}(\lambda))\,; \quad 0 < c_3^* \leqq z_{mm}^{(1)}(\lambda) \leqq c_2^*\,;$$
$$l, m = 2, 3, \ldots.$$

Setzen wir weiter [2]

$$0 < \gamma = \alpha_0^* < 1 \quad \text{für} \quad \frac{\alpha_0^*}{1 - \alpha_0^*} \leqq 1\,;$$

$$0 < \gamma = 1 - \frac{(1 - \alpha_0^*)^2}{\alpha_0^*} < 1 \quad \text{für} \quad \frac{\alpha_0^*}{1 - \alpha_0^*} > 1$$

und führen wir die folgenden Bezeichnungen [2] ein:

$$\|S\| = \sup_{\lambda \in \langle\lambda_1, \lambda_2\rangle} \max\left[\|S^{(1)}(\lambda)\|, \|S^{(2)}(\lambda)\|\right]$$

$$\omega_{22} = \omega_{23}\left[1 + \frac{1}{(1 - \gamma)}\,\frac{1}{(c_3^* + \vartheta_{\min}^* - \varepsilon c_2^*)}\right]; \quad \omega_{23} = \left[\min_{\lambda \in \langle\lambda_1, \lambda_2\rangle} \left|\frac{\mathrm{d}a_{11}(\lambda)}{\mathrm{d}\lambda}\right|\right]^{-1}$$

$$\omega_{21} = \omega_{23}\left\{1 + \|c\| + \frac{\|c\| + (1-\gamma)\|b\|}{(1-\gamma)(c_3^* + \vartheta_{\min}^* - \varepsilon c_2^*)} + \right.$$

$$\left. + \varepsilon \frac{\|b\|}{(c_3^* + \vartheta_{\min}^* - \varepsilon c_2^*)} \cdot 2 \sup_{\lambda \in \langle \lambda_1, \lambda_2 \rangle} \|N_2^{(0)}(\lambda)\|\right\}$$

$$\omega_{20} = \left\{\nu + \varepsilon\omega_{23} \frac{\|b\| \cdot \|c\|}{(1-\gamma)(c_3^* + \vartheta_{\min}^* - \varepsilon c_2^*)^2} \cdot 2 \sup_{\lambda \in \langle \lambda_1, \lambda_2 \rangle} \|N_2^{(0)}(\lambda)\|\right\}$$

$$\omega_{11} = \omega_{23}\left\{\frac{1}{(1-\gamma)} \frac{1}{(c_3^* + \vartheta_{\min}^* - \varepsilon c_2^*)}\left[\|S\| \frac{(\|b\| + \|c\|)}{(c_3^* + \vartheta_{\min}^* - \varepsilon c_2^*)} + \sup_{\lambda \in \langle \lambda_1, \lambda_2 \rangle} \left\|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda} b(\lambda)\right\|\right]\right\}$$

$$\omega_{12} = \omega_{23}\left\{\frac{\|S\|}{(1-\gamma)} \frac{1}{(c_3^* + \vartheta_{\min}^* - \varepsilon c_2^*)^2} + \sup_{\lambda \in \langle \lambda_1, \lambda_2 \rangle} \left\|\frac{d}{d\lambda} b(\lambda)\right\|\right\}$$

$$\pi_0 = \left\{\frac{\|c\| + \|b\|}{(c_3^* + \vartheta_{\min}^* - \varepsilon c_2^*)} + \frac{1}{N}\left[\|c\| + \frac{\vartheta}{(c_3^* + \vartheta_{\min}^* - \varepsilon c_2^*)}\right] + \frac{1}{N^2}\vartheta\right\}.$$

Weiter führen wir ein die Zahlen [2]

(10)

$$\bar{f}_m^{(k)} = \left(\frac{\mathrm{d}a_{11}}{\mathrm{d}\lambda}\bigg|_{\lambda = \lambda_k(m)}\right)^{-1}\left[\left(\bar{g}_m^{(k)}, c(\lambda_k^{(m)} + \tau_k^{(m)}) + r_k^{(m)}\right) + \left(D_k^{-1}(\lambda_k^{(m)})\, b_k^{(m)}, \frac{\overline{dc}_k^{(m)}}{d\lambda}\right)\right]$$

(10a)

$$\bar{\bar{f}}_m^{(k)} = \left(\frac{\mathrm{d}a_{11}}{\mathrm{d}\lambda}\bigg|_{\lambda = \lambda_k(m)}\right)^{-1}\left[\left(\bar{\bar{g}}_m^{(k)}, c(\lambda_k^{(m)} + \tau_k^{(m)}) + r_k^{(m)}\right) + \right.$$

$$\left. + \left(D_k^{-1}(\lambda_k^{(m)})\, b_k^{(m)}, r_k^{(m)}\right) + \mu_k^{(m)}\right] + \nu_k^{(m)}$$

und die Vektoren [2]

$$\bar{g}_m^{(k)} = \left\{(-1)\,(D_0^{(k)})^{-1}\, S_k^{(m)}[D_k^{-1}(\lambda_k^{(m)} + \tau_k^{(m)})]\,.\right.$$

$$\left. .\,[b(\lambda_k^{(m)} + \tau_k^{(m)}) + s_k^{(m)}] + (D_0^{(k)}) \frac{\overline{\mathrm{d}b}_k^{(m)}}{\mathrm{d}\lambda}\right\}$$

$$\bar{\bar{g}}_m^{(k)} = \{\varepsilon_k^{(m)} + (D_0^{(k)})^{-1}\, s_k^{(m)} - \varepsilon D_k^{-1}(\lambda_k^{(m)})\,.$$

$$.\,[N_{2k}^{(0)}(\lambda_k^{(m)} + \tau_k^{(m)}) - N_{2k}^{(0)}(\lambda_k^{(m)})]\,(D_0^{(k)})^{-1}\, b_k^{(m)}\}$$

wo bedeutet

$$N_{2k}^{(0)} = P_k N_2^{(0)} P_k\,; \quad S_k^{(m)} = P_k S_k^{(1)} P_k(\lambda_k^{(m)} + \tau_k^{(m)})\,; \quad b_k^{(m)} = b_k(\lambda_k^{(m)})\,; \quad c_k^{(m)} = c_k(\lambda_k^{(m)})$$

$$\frac{\overline{\mathrm{d}c}_k^{(m)}}{\mathrm{d}\lambda} = \left(\frac{\mathrm{d}c_1}{\mathrm{d}\lambda}\bigg|_{\lambda = \bar{\lambda}_1(m)}, \frac{\mathrm{d}c_2}{\mathrm{d}\lambda}\bigg|_{\lambda = \bar{\lambda}_2(m)}, \ldots\right); \quad \frac{\overline{\mathrm{d}b}_k^{(m)}}{\mathrm{d}\lambda} = \left(\frac{\mathrm{d}b_1}{\mathrm{d}\lambda}\bigg|_{\lambda = \bar{\bar{\lambda}}_1(m)}, \frac{\mathrm{d}b_2}{\mathrm{d}\lambda}\bigg|_{\lambda = \bar{\bar{\lambda}}_2(m)}, \ldots\right)$$

$$\bar{\lambda}_i^{(m)} \in \langle \lambda_k^{(m)}, \lambda_k^{(m)} + \tau_k^{(m)} \rangle\,; \quad \bar{\bar{\lambda}}_i^{(m)} \in \langle \lambda_k^{(m)}, \lambda_k^{(m)} + \tau_k^{(m)} \rangle\,; \quad (i = 1, 2, \ldots)\,.$$

Man kann beweisen [2] (S. 102) den folgenden

Satz 1. 1) *Es mögen für den Algorithmus* (3), (4) *zur Lösung der homogenen Operatorengleichung* (2) *die im Satz* 3b *in der Arbeit* [2] (S. 82) *angeführten hinreichenden Konvergenzbedingungen erfüllt werden.*

2) *Es möge der Vektor* $b(\lambda)$ *der Bedingung genügen*

$$0 < \sup_{\lambda \in \langle \lambda_1, \lambda_2 \rangle} \left\| \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda} b(\lambda) \right\| (c_3^* + \vartheta_{\min}^* - \varepsilon c_2^*) \leqq \|S\| \,.\, \|b\| \,.$$

3) *Die Berechnung der Vektoren* $b(\lambda_k^{(m)})$ (*mit dem Fehler* $s_k^{(m)}$), $c(\lambda_k^{(m)})$, (*mit dem Fehler* $r_k^{(m)}$) *aus den Beziehungen*

$$\tilde{b}(\tilde{\lambda}_k^{(m)}) = b(\tilde{\lambda}_k^{(m)}) + s_k^{(m)} \,; \quad \tilde{c}(\tilde{\lambda}_k^{(m)}) = c(\tilde{\lambda}_k^{(m)}) + r_k^{(m)} \tag{11}$$

und die Berechnung des Skalarproduktes $(c(\lambda_k^{(m)}), x_k^{(k)}(\lambda_k^{(m)}))$ (*mit dem Fehler* $\mu_k^{(m)}$) *aus der Beziehung*

$$\widetilde{(\tilde{c}(\tilde{\lambda}_k^{(m)}), \tilde{x}_k^{(k)}(\tilde{\lambda}_k^{(m)}))} = (\tilde{c}(\tilde{\lambda}_k^{(m)}), \tilde{x}_k^{(k)}(\tilde{\lambda}_k^{(m)})) + \mu_k^{(m)} \tag{12}$$

möge mit Hinsicht auf den Index k eine numerisch stabile α_1*-Folge von numerischen Prozessen bilden, so dass für die entsprechenden Fehler* $r_k^{(m)}$, $s_k^{(m)}$, $\mu_k^{(m)}$ *für beliebiges* $k \geqq N$ *die Abschätzungen gelten*

$$0 < k\|r_k^{(m)}\| < \vartheta \,; \quad 0 < k\|s_k^{(m)}\| < \vartheta \,; \quad 0 < k|\mu_k^{(m)}| < \vartheta \,. \tag{13}$$

4) *Die Berechnung des Vektors* $x_k^{(k)}(\lambda_k^{(m)}) = D_k^{-1}(\lambda_k^{(m)})\, b_k(\lambda_k^{(m)}) \in l^2$ *mit Hilfe der Eliminationsmethode* (*mit dem Fehler* $\varepsilon_k^{(m)} \in l^2$) *aus der Beziehung*

$$\tilde{x}_k^{(k)}(\tilde{\lambda}_k^{(m)}) = D_k^{-1}(\tilde{\lambda}_k^{(m)})\, \tilde{b}(\tilde{\lambda}_k^{(m)}) + \varepsilon_k^{(m)} \in l^2 \tag{14}$$

möge mit Hinsicht auf den Index k eine numerisch stabile α_2*-Folge von numerischen Prozessen bilden, so dass für den Eliminationsfehler* $\varepsilon_k^{(m)}$ *für beliebiges* $k \geqq N$ *die Abschätzung gilt*

$$k^2\|\varepsilon_k^{(m)}\| < \vartheta \,. \tag{15}$$

5) *Es mögen die Fehler* $v_k^{(m)}$ *bei der Berechnung der inversen Funktion* $h(a_{11})$ *zur Funktion* $a_{11}(\lambda)$ *für jedes* $\lambda \in \langle \lambda_1, \lambda_2 \rangle$ *die Bedingung der Begrenzheit erfüllen*

$$0 \leqq |v_k^{(m)}| \leqq v \tag{16}$$

und es mögen der maximale Interpolationsfehler v der inversen Funktion $h(a_{11})$ *und der Parameter* ε *des Operators* $N(\lambda) = N_1(\lambda) + \varepsilon N_2(\lambda)$ *so klein sein, dass eine Zahl* $\eta > 0$ *existiert, die den folgenden zwei Ungleichungen genügt:*

$$\omega_{20} < \eta \,.\, \vartheta \,; \quad \omega_{21} + \eta < 1 \,. \tag{17}$$

Es möge weiter der kleine Parameter ε *die Ungleichung*

$$\varepsilon \frac{2 \sup\limits_{\lambda \in \langle \lambda_1, \lambda_2 \rangle} \|N_2^{(0)}(\lambda)\|}{(c_3^* + \vartheta_{\min}^* - \varepsilon c_2^*)} \leqq \gamma < 1 \tag{18}$$

erfüllen.

6) *Es möge die Zahl $\vartheta > 0$ so klein und die natürliche Zahl $N \leqq k$ so gross sein, dass die Ungleichungen*

$$\lambda_1 \leqq \lambda_k^{(m+1)} \pm \frac{\vartheta}{\varkappa} \leqq \lambda_2 \; ; \tag{19}$$

$$\min_{\lambda \in \langle \lambda_1, \lambda_2 \rangle} a_{11}(\lambda) \leqq \left(c(\tilde{\lambda}_k^{(m)}),\, D_k^{-1}(\tilde{\lambda}_k^{(m)})\, b(\tilde{\lambda}_k^{(m)})\right) \pm \frac{\vartheta}{N}\, \pi_0 \leqq \max_{\lambda \in \langle \lambda_1, \lambda_2 \rangle} a_{11}(\lambda)$$

gelten und es möge der Anfangsfehler $\tau_k^{(0)} = \tilde{\lambda}_k^{(0)} - \lambda_k^{(0)}$ für alle $k \geqq N$ die folgende Beziehung erfüllen

$$\tilde{\tau}_k^{(0)} = \tau_k^{(0)} = 0 \Leftrightarrow \tilde{\lambda}_{k+1}^{(0)} = \lambda_{k+1}^{(0)} = \tilde{\lambda}_k \; ; \quad \lambda_N^{(0)} \in \langle \lambda_1, \lambda_2 \rangle \, . \tag{20}$$

Dann gilt: 1) *Die Folge von numerischen Prozessen*

$$\tilde{\lambda}_k^{(m+1)} - \lambda_k^{(m+1)} \equiv \tau_k^{(m+1)} = \tau_k^{(m)} \, . \, \bar{f}_m^{(k)} + \bar{\bar{f}}_m^{(k)} \tag{21}$$

auf welche der Algorithmus (3), (4) *zur Lösung des homogenen unendlichen Systems von linearen Gleichungen* (2) *im Raume l^2 mit Hilfe der Reduktionsmethode und der Banachschen Iteration überführt werden kann, ist für jedes $k \geqq N$ gleichmässig* (*hinsichtlich des Indexes k*) *stark* (*hinsichtlich des Indexes m*) *numerisch stabil.*

2) *Für den Quotienten* $(1 - \varkappa)$ *der starken Stabilität und für den Fehler $\vartheta_k^{(m)}$ gelten die asymptotischen Abschätzungen* (*für $\vartheta \to 0$, $\varepsilon \to 0$*)

$$(1 - \varkappa) = \alpha + \omega_{11}\vartheta + \omega_{12}\vartheta^2 \approx \alpha \tag{22}$$

$$0 \leqq |\vartheta_k^{(m)}| < \omega_{20} + \omega_{21}\vartheta + \omega_{22}\vartheta^2 + \omega_{23}\vartheta^3 \approx \nu \, . \tag{22a}$$

Zum Schluss sei noch bemerkt, dass die hinreichenden Bedingungen für die Gültigkeit der Voraussetzung 4) des Satzes 1 (hinsichtlich der numerischen Stabilität der Eliminationsmethode) in der Monographie [3] angegeben sind. Im Problem (1) sollen diese Bedingungen aus physikalischen Gründen erfüllt werden.

Literatur

[1] *J. Čermák, L. Trlifaj:* Влияние частично погруженного поглощающего стержня на распределение плотности нейтронного потока. Атомная энергия т. *9*, вып. 5, (1960), 470—476.

[2] *R. Zezula:* O jedné přibližné metodě řešení některých okrajových úloh v teorii jaderných reaktorů. Disertace Praha 1967. Zpráva ÚJV 1785/67.

[3] *I. Babuška, M. Práger, E. Vitásek:* Numerical Processes in differential equations. SNTL Praha, J. Wiley New York 1966.

R. Zezula, ÚJV ČSAV, Řež u Prahy, ČSSR.