GEODÄTISCHE LINIE UND GEGENNORMALSCHNITTE I

ZBYNĚK NÁDENÍK und LADISLAV ZAJÍČEK

(Eingelangt am 26. Mai 1967.)

Es sei Π eine analytische reguläre Fläche[1]). Wir wählen einen Punkt $O \in \Pi$ und eine von O ausgehende Geodätische $g \subset \Pi$. Auf dieser wählen wir einen anderen Punkt $Q \neq O$ und bezeichnen mit s die Bogenlänge von g zwischen O und Q $(s \to 0 \Leftrightarrow Q \to O)$; Q sei dabei in einer solchen Umgebung von O, in welcher die von O ausgehenden Geodätischen keinen weiteren gemeinsamen Punkt haben. Wir konstruieren den durch Q gehenden Normalschnitt n von Π in O und den durch O gehenden Normalschnitt n^* von Π in Q (d.h. die sogenannten *Gegennormalschnitte*). Im folgenden werden wir nur solche Bögen dieser Kurven betrachten, welche für $Q \to O$ in den Punkt O übergehen.

Die Bedeutung der Geodätischen und der Gegennormalschnitte für die höhere Geodäsie ist evident: Bei den Berechnungen auf dem Referenzellipsoid arbeitet man mit den Geodätischen, während die im Terrain mit dem Theodolit gemessenen Winkel nur Winkel zwischen den Normalschnitten sind.

In der Tangentenebene τ im Punkt O wählen wir das orthogonale Koordinatensystem mit den Achsen x, y in den Hauptkrümmungsrichtungen; ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann man sie so orientieren, dass die in Richtung von O zu Q orientierte Tangente der Geodätischen g in den ersten Quadrant gerichtet ist (oder event. mit der x-Achse identisch ist); sie hat dann den Steigungskoeffizient k. Die extremale Normalkrümmung in Richtung der x-Achse (bzw. y-Achse) bezeichnen wir mit $1/R_1$ (bzw. $1/R_2$) und der Kürze halber setzen wir

$$\alpha = \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)\left(\frac{k}{R_1} - \frac{k^3}{R_2}\right). \tag{1}$$

Die Kurven g, n, n^* projizieren wir senkrecht auf die Ebene τ in die Kurven $\bar{g}$, $\bar{n}$, $\bar{n}^*$ und den Punkt Q in den Punkt $\bar{Q}$ mit den Koordinaten $[\xi, \eta]$; $\bar{n}$ ist die Strecke $O\bar{Q}$. In der Ebene τ wählen wir eine beliebige Gerade $x = c =$ konst., $0 < c < \xi$, und wir bezeichnen mit y_g, y_n, y_{n^*} die Ordinaten ihrer Schnittpunkte mit den Kurven $\bar{g}$, $\bar{n}$, $\bar{n}^*$.

[1]) Diese Voraussetzung lässt sich wesentlich verringern, aber ohne besondere Bedeutung für unsere Schlüsse.

Über den gegenseitigen Verlauf der Geodätischen g und der Normalschnitte n, n^* gilt dann für genügend kleines $\xi > 0$ dieser Satz:

1. *Angenommen, die Geodätische g gehe vom Punkt O nich in einer Hauptkrümmungsrichtung aus $(k \neq 0)$. Wenn $\alpha \neq 0$, dann hat der Unterschied*

$$(2_{1-3}) \qquad y_n - y_g \quad bzw. \quad y_g - y_{n^*} \quad bzw. \quad y_n - y_{n^*}$$

im Intervall $(0, \xi)$ für

$$(3_{1-3}) \quad x = \frac{1}{\sqrt{3}}\,\xi + (2) \quad bzw. \quad x = \left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)\xi + (2) \quad bzw. \quad x = \tfrac{1}{2}\xi + (2)$$

den Extremwert

$$(4_{1-3}) \qquad \frac{\alpha}{9\,.\,\sqrt{3}}\,\xi^3 + (4) \quad bzw. \quad \frac{\alpha}{9\,.\,\sqrt{3}}\,\xi^3 + (4) \quad bzw. \quad \frac{\alpha}{8}\,\xi^3 + (4)\,.$$

Auf dem Rotationsellipsoid hat schon F. R. Helmert ([2], Kap. 7) die Lage der Geodätischen zu den Gegennormalschnitten untersucht. Obwohl sein Verfahren nicht ganz frei von den Einwänden ist, findet man eine solche Darlegungsweise auch in neueren Lehrbüchern über höhere Geodäsie (siehe [3], Kap. XII, besonders § 120 und [5], § 12; das Buch [2] ist um mehr als achtzig Jahre älter als [5] und doch ist das Verfahren in [2] beträchtlich genauer als in [5]). Die Beschränkung auf das Referenzellipsoid ist aber unwesentlich und führt nicht zur Vereinfachung der Rechnungen oder der Ergebnisse.

Dem Fall, dass die Geodätische g vom Punkt O in einer Hauptkrümmungsrichtung ausgeht, ist bisher ungenügende Aufmerksamkeit gewidmet worden (vgl. [2], S. 343 oder [1], S. 119–120). Ihn betrifft der Satz

2. *Angenommen, die Geodätische g gehe vom Punkt O in einer Hauptkrümmungsrichtung aus. Wir setzen ebenso wie in [4]*

$$(5) \qquad b = \left[\frac{\partial}{\partial y}\,\frac{1}{R_1(x, y)}\right]_{x=y=0}$$

und nehmen noch $b/R_1 \neq 0$ an. Im Intervall $(0, \xi)$ haben die Unterschiede (2_{1-3}) für

$$(6_{1-3}) \qquad x = \frac{1}{\sqrt[3]{4}}\,\xi + (2) \quad bzw. \quad x = a\xi + (2) \quad bzw. \quad x = \tfrac{1}{2}\xi + (2)$$

die Extremwerte

$$(7_{1-3}) \qquad -\frac{b}{32\sqrt[3]{4}\,.\,R_1}\,\xi^4 + (5) \quad \textit{bzw.} \quad -\frac{b}{24R_1}(5a - 6a^2 + a^4)\,\xi^4 + (5)$$

$$\textit{bzw.} \quad -\frac{b}{16R_1}\,\xi^4 + (5)\,;$$

$a = 0{,}446\ldots$ *ist die einzige Wurzel der Gleichung* $4a^3 - 12a + 5 = 0$ *im Intervall* $(0, 1)$.

Falls auf dem Rotationsellipsoid die Geodätische g mit dem Meridian oder mit dem Äquator identisch ist, so ist freilich die ganze Situation trivial. Sonst sind aber die Voraussetzungen des Satzes 1 oder 2 erfüllt, was leicht zu verifizieren ist (vgl. [4], Abschn. 7).

Es folgen die Beweise der beiden Sätze.

1. Die Projektionen $\bar{g}$, $\bar{n}$, $\bar{n}^*$ der Kurven g, n, n^* haben in der Tangentenebene τ die Gleichungen

$$(1{,}1) \qquad y_g = kx + \tfrac{1}{6}\alpha x^3 + [4(x)]\,,$$

$$(1{,}2) \qquad y_n = \{k + \tfrac{1}{6}\alpha\xi^2 + [3(\xi)]\}\,x\,,$$

$$(1{,}3) \qquad y_{n^*} = \{k - \tfrac{1}{3}\alpha\xi^2 + [3(\xi)]\}\,x + \{\tfrac{1}{2}\alpha\xi + [2(\xi)]\}\,x^2 + [3(x)]\,,$$

in denen $x \in \langle 0, \xi\rangle$. Die Gleichung (1,1) und der Steigungskoeffizient der Geraden (1,2) sind in [4][2]) hergeleitet worden (siehe (1) in vorangeführter Einleitung und (2,11) mit (3,3) in [4]).

Zum Koordinatensystem in der Tangentenebene τ fügen wir die zu τ senkrechte z-Achse bei. Die Gleichung der Fläche Π ist dann

$$(1{,}4) \qquad z = \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{R_1} + \frac{y^2}{R_2}\right) + [3(x, y)]$$

und die Gleichung der durch die Punkte O, Q und die Flächennormale von Π in Q bestimmten Ebene ist infolge (1,4) und (1,1) (vgl. dazu (3,4) und (3,5) in [4])

$$(1{,}5)$$

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ \xi & k\xi + \tfrac{1}{6}\alpha\xi^3 + [4(\xi)] & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{R_1} + \dfrac{k^2}{R_2}\right)\xi^2 + [4(\xi)] \\ \xi + \dfrac{1}{2R_1}\left(\dfrac{1}{R_1} + \dfrac{k^2}{R_2}\right)\xi^3 + [4(\xi)] & k\xi + \dfrac{R_2 + 2R_1}{6R_1R_2}\left(\dfrac{k}{R_1} + \dfrac{k^3}{R_2}\right)\xi^3 + [4(\xi)] & 0 \end{vmatrix} = 0\,.$$

---

[2]) In [4] haben wir vorausgesetzt, dass der Punkt O elliptisch ist. Diese Annahme war aber unwesentlich für die Herleitung der vorzitierten Ergebnisse.

Eliminieren wir z aus (1,4) und (1,5), so erhalten wir die Gleichung der Projektion $\bar{n}^*$ und mittels der üblichen Operationen mit den Potenzreihen kann man sie auf die Form (1,3) bringen.

Nach (1,1) und (1,2) ist

$$\frac{\mathrm{d}(y_n - y_g)}{\mathrm{d}x} = \tfrac{1}{6}\alpha\xi^2 - \tfrac{1}{2}\alpha x^2 + [3(x, \xi)]$$

und diese Ableitung verschwindet für x aus (3_1). Für dieses x ist weiter

$$\frac{\mathrm{d}^2(y_n - y_g)}{\mathrm{d}x^2} = -\frac{\alpha}{\sqrt{3}}\,\xi + [2(\xi)] \neq 0$$

(stets für genügend kleines $\xi > 0$). Das Einsetzen aus (3_1) in den nach (1,1) und (1,2) bestimmten Unterschied (2_1) liefert seinen Extremwert (4_1), welcher für $\alpha > 0$ (bzw. $\alpha < 0$) das Maximum (bzw. Minimum) ist.

Die Behauptungen über die Unterschiede (2_2) und (2_3) kann man unter Zuhilfenahme von (1,1)–(1,3) ähnlich beweisen. Der Ausdruck α aus (1) lässt sich folgendermassen geometrisch interpretieren: Die Krümmung der Kurve $\bar{n}^*$ im Punkt O ist $\varkappa_0 = |\alpha\xi + [2(\xi)]| : \{1 + k^2 + [2(\xi)]\}^{\frac{3}{2}}$, so dass $\lim_{\xi \to 0} \varkappa_0 : \xi = |\alpha| : \{1 + k^2\}^{\frac{3}{2}}$. Daraus und aus $\lim_{s \to 0} \xi : s = 1 : \{1 + k^2\}^{\frac{1}{2}}$ (siehe (3,12) in [4]) folgt $\lim_{\xi \to 0} \varkappa_0 s^3 : \xi^4 = |\alpha|$.

2. Wenn die Geodätische g vom Punkt O in einer Hauptkrümmungsrichtung ausgeht, ist $k = 0$ (siehe die Konvention in der Einleitung) und in der Tangentenebene τ haben dann die Gleichungen der Projektionen $\bar{g}$, $\bar{n}$, $\bar{n}^*$ die Form

$$(2,1) \qquad y_g = -\frac{b}{24R_1}x^4 + [5(x)]\,,$$

$$(2,2) \qquad y_n = \left\{-\frac{b}{24R_1}\xi^3 + [4(\xi)]\right\}x\,,$$

$$(2,3) \qquad y_{n^*} = \left\{\frac{5b}{24R_1}\xi^3 + [4(\xi)]\right\}x + \left\{-\frac{b}{4R_1}\xi^2 + [3(\xi)]\right\}x^2 + [3(x)]\,,$$

und zwar für das in (5) bestimmte b. Die Gleichung (2,1) und der Steigungskoeffizient der Geraden (2,2) sind ebenfalls in [4] hergeleitet worden (siehe (5,5) und (6,2) in [4]).

In dem im Abschn. 1 eingeführten Koordinatensystem hat die Fläche Π die Gleichung

$$(2,4) \qquad z = \frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{R_1} + \frac{y^2}{R_2}\right] + \tfrac{1}{6}[ax^3 + 3bx^2y + 3cxy^2 + dy^3] + [4(x, y)]\,.$$

Die Koeffizienten a, c, d werden im folgenden nicht zur Anwendung kommen. Aus (2,1) und (2,4) erhalten wir wieder die Gleichung der durch die Punkte O, Q und die Flächennormale von Π in Q bestimmten Ebene (vgl. (6,3) in [4]):

$$(2,5)\qquad \begin{vmatrix} x & y & z \\ \xi & \dfrac{b}{24R_1}\,\xi^4 + [5(\xi)]\,, & \dfrac{1}{2R_1}\,\xi^2 + [3(\xi)] \\ \xi + \dfrac{1}{2R_1^2}\,\xi^3 + [4(\xi)]\,, & \dfrac{5b}{24R_1}\,\xi^4 + [5(\xi)]\,, & 0 \end{vmatrix} = 0\,.$$

Ähnlich wie im Abschn. 1 liefert auch jetzt die Elimination von z aus (2,4) und (2,5) die Gleichung (2,3).

Nach (2,1) und (2,2) ist

$$\frac{\mathrm{d}(y_n - y_g)}{\mathrm{d}x} = -\,\frac{b}{24R_1}\,\xi^3 + \frac{b}{6R_1}\,x^3 + [4(x, \xi)]\,.$$

Diese Ableitung verschwindet für x aus (6_1), für welches

$$\frac{\mathrm{d}^2(y_n - y_g)}{\mathrm{d}x^2} = \frac{b}{4\sqrt[3]{2}\,.\,R_1}\,\xi^2 + [3(\xi)] \neq 0$$

(stets für genügend kleines $\xi > 0$ und freilich unter den Voraussetzungen des Satzes 2). Das Einsetzen von x aus (6_1) in den nach (2,1) und (2,2) bestimmten Unterschied (2_1) liefert den Extremwert (7_1) und dieser ist das Maximum (bzw. Minimum), falls R_1 und b die verschiedenen (bzw. dieselben) Vorzeichen haben.

Aus (2,1) und (2,3) folgt

$$\frac{\mathrm{d}(y_g - y_{n*})}{\mathrm{d}x} = -\,\frac{5b}{24R_1}\,\xi^3 + \frac{b}{2R_1}\,\xi^2 x - \frac{b}{6R_1}\,x^3 + [4(\xi, x)]\,.$$

Die rechte Seite verschwindet für x aus (6_2), wo der Koeffizient a zum Schluss des Satzes 2 bestimmt ist. Für dieses x ist

$$\frac{\mathrm{d}^2(y_g - y_{n*})}{\mathrm{d}x^2} = \frac{b}{R_1}\left(\frac{1}{2} - \frac{a}{3}\right)\xi^2 + [3(\xi)] \neq 0\,,$$

so dass für $b/R_1 > 0$ (bzw. <0) der Wert (7_2) das Minimum (bzw. Maximum) ist.

Auf ähnliche Weise verifizieren wir, dass auch der Unterschied (2_3) für (6_3) den Extremwert (7_3) annimmt.

Literatur

[1] *C. F. Baeschlin:* Lehrbuch der Geodäsie. Zürich 1948.
[2] *F. R. Helmert:* Die mathematischen und physikalischen Theorien der höheren Geodäsie. Bd. I, Leipzig 1880 und 1962. (Verkürzte Übersetzung: Математические и физические теории высшей геодезии. Москва 1962.)
[3] *W. Jordan - E. Eggert - M. Kneissl:* Handbuch der Vermessungskunde. Bd. IV, Teil. 2, Stuttgart 1958 (10. Aufl.).
[4] *Z. Nádeník:* O úhlech mezi geodetickou čarou a protějšími normálními řezy. Geodet. a kart. sborník, Bd. 9, Praha 1963, 71—75.
[5] *П. С. Закатов:* Курс высшей геодезии. Москва 1964 (3. Aufl.). (Lehrbuch der höheren Geodäsie, Berlin 1957. Geodezja wyżsa, Warszawa 1959.)

Výtah

GEODETICKÁ ČÁRA A PROTĚJŠÍ NORMÁLNÍ ŘEZY I

ZBYNĚK NÁDENÍK a LADISLAV ZAJÍČEK

Je vyšetřována vzájemná poloha geodetiky a protějších normálních řezů v bodech O, Q i v případě, kdy geodetika vychází z bodu O v hlavním směru.

Резюме

ГЕОДЕЗИЧЕСКАЯ ЛИНИЯ И ВЗАИМНЫЕ НОРМАЛЬНЫЕ СЕЧЕНИЯ I

ЗБЫНЕК НАДЕНИК (ZBYNĚK NÁDENÍK) и ЛАДИСЛАВ ЗАЙИЧЕК (LADISLAV ZAJÍČEK)

Изучается положение геодезической линии и взаимных нормальных сечений в точках O, Q тоже в случае, когда геодезическая линия идет из точки O в главном направлении.

Anschrift der Verfasser: Doc. dr. *Zbyněk Nádeník* C.Sc., *Ing. Ladislav Zajíček*, Praha 2, Trojanova 13, České vysoké učení technické.