

Aplikace matematiky

Ján Chrapan

Transformácia Jacobiho dzeta-funkcií na tvar s reálným modulom

Aplikace matematiky, Vol. 13 (1968), No. 5, 417--420

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/103188>

Terms of use:

© Institute of Mathematics AS CR, 1968

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

TRANSFORMÁCIA JACOBIHO DZÉTA FUNKCIÍ
NA TVAR S REÁLNYM MODULOM

JÁN CHRAPAN

(Došlo dňa 28. júna 1967)

Z transformačných vzťahov Jacobiho thétafunkcií [1; str. 140]

$$(1) \quad \begin{aligned} \vartheta_0(u; \tau + 1) &= \vartheta_3(u; \tau); \\ \vartheta_1(u; \tau + 1) &= e^{i(\pi/4)} \cdot \vartheta_1(u; \tau); \\ \vartheta_2(u; \tau + 1) &= e^{i(\pi/4)} \cdot \vartheta_2(u; \tau); \\ \vartheta_3(u; \tau + 1) &= \vartheta_0(u; \tau) \end{aligned}$$

vyplývajú relácie

$$\begin{aligned} \frac{d}{dw} \ln \vartheta_0 \left(\frac{w}{2K}; \frac{K + iK'}{K} \right) &= \frac{d}{dw} \ln \vartheta_3 \left(\frac{w}{2K}; i \frac{K'}{K} \right); \\ \frac{d}{dw} \ln \vartheta_1 \left(\frac{w}{2K}; \frac{K + iK'}{K} \right) &= \frac{d}{dw} \ln \vartheta_1 \left(\frac{w}{2K}; i \frac{K'}{K} \right); \\ \frac{d}{dw} \ln \vartheta_2 \left(\frac{w}{2K}; \frac{K + iK'}{K} \right) &= \frac{d}{dw} \ln \vartheta_2 \left(\frac{w}{2K}; i \frac{K'}{K} \right); \\ \frac{d}{dw} \ln \vartheta_3 \left(\frac{w}{2K}; \frac{K + iK'}{K} \right) &= \frac{d}{dw} \ln \vartheta_0 \left(\frac{w}{2K}; i \frac{K'}{K} \right), \end{aligned}$$

kde

$$\frac{w}{2K} = u; \quad i \frac{K'}{K} = \tau,$$

ktoré možno prepísať pomocou Jacobiho dzétafunkcií [2; (1) a (2)] do tvaru

$$(2) \quad \begin{aligned} \frac{d}{dw} \ln \vartheta_0 \left(\frac{w}{2K}; \frac{K + iK'}{K} \right) &= Z_3(w; k); \\ \frac{d}{dw} \ln \vartheta_1 \left(\frac{w}{2K}; \frac{K + iK'}{K} \right) &= Z_1(w; k), \end{aligned}$$

$$\frac{d}{dw} \ln \vartheta_2 \left(\frac{w}{2K}; \frac{K + iK'}{K} \right) = Z_2(w; k);$$

$$\frac{d}{dw} \ln \vartheta_3 \left(\frac{w}{2K}; \frac{K + iK'}{K} \right) = Z_0(w; k).$$

Na základe substitúcií [1; str. 143]

$$k = \frac{\vartheta_2^2}{\vartheta_3^2}; \quad k' = \frac{\vartheta_0^2}{\vartheta_3^2};$$

$$K = \frac{1}{2}\pi\vartheta_3^2; \quad K' = -i\tau K$$

pre transformované hodnoty

$$\bar{k} = \frac{\bar{\vartheta}_2^2}{\bar{\vartheta}_3^2}; \quad \bar{k}' = \frac{\bar{\vartheta}_0^2}{\bar{\vartheta}_3^2};$$

$$\bar{K} = \frac{1}{2}\pi\bar{\vartheta}_3^2; \quad \bar{K}' = -i(\tau + 1)\bar{K},$$

vzhľadom na (1) máme

$$\bar{k} = i \frac{k}{k'}; \quad \bar{k}' = \frac{1}{k'};$$

$$\bar{K} = k'K; \quad \bar{K}' = -ik'(K + iK').$$

Vložením týchto hodnôt do ľavých strán relácií (2) vychádza

$$\frac{d}{dw} \ln \vartheta_0 \left(\frac{wk'}{2\bar{K}}; i \frac{\bar{K}'}{\bar{K}} \right) = Z_3(w; k);$$

$$\frac{d}{dw} \ln \vartheta_1 \left(\frac{wk'}{2\bar{K}}; i \frac{\bar{K}'}{\bar{K}} \right) = Z_1(w; k);$$

$$\frac{d}{dw} \ln \vartheta_2 \left(\frac{wk'}{2\bar{K}}; i \frac{\bar{K}'}{\bar{K}} \right) = Z_2(w; k);$$

$$\frac{d}{dw} \ln \vartheta_3 \left(\frac{wk'}{2\bar{K}}; i \frac{\bar{K}'}{\bar{K}} \right) = Z_0(w; k)$$

a po substitúcií

$$wk' = v,$$

$$k' \cdot \frac{d}{dv} \ln \vartheta_0 \left(\frac{v}{2\bar{K}}; i \frac{\bar{K}'}{\bar{K}} \right) = Z_3 \left(\frac{v}{k'}; k \right);$$

$$k' \cdot \frac{d}{dv} \ln \vartheta_1 \left(\frac{v}{2\bar{K}}; i \frac{\bar{K}'}{\bar{K}} \right) = Z_1 \left(\frac{v}{k'}; k \right);$$

$$k' \cdot \frac{d}{dv} \ln \vartheta_2 \left(\frac{v}{2\bar{K}} ; i \frac{\bar{K}'}{\bar{K}} \right) = Z_2 \left(\frac{v}{k'} ; K \right) ;$$

$$k' \cdot \frac{d}{dv} \ln \vartheta_3 \left(\frac{v}{2\bar{K}} ; i \frac{\bar{K}'}{\bar{K}} \right) = Z_0 \left(\frac{v}{k'} ; k \right),$$

resp. podľa [2; (1) a (2)]

$$(3) \quad k' \cdot Z_0(v; \bar{k}) = Z_3 \left(\frac{v}{k'} ; k \right) ;$$

$$k' \cdot Z_1(v; \bar{k}) = Z_1 \left(\frac{v}{k'} ; k \right) ;$$

$$k' \cdot Z_2(v; \bar{k}) = Z_2 \left(\frac{v}{k'} ; k \right) ;$$

$$k' \cdot Z_3(v; \bar{k}) = Z_0 \left(\frac{v}{k'} ; k \right).$$

Pri hodnote modulu

$$0 < k < 1$$

transformovaný modul

$$\bar{k} = i \frac{k}{k'}$$

je imaginárny. Keď zavedieme označenie

$$\bar{k} = i\kappa,$$

z relácií (3) dostaneme transformačné vzťahy Jacobihy dzétafunkcií na tvar s reálnym modulom

$$(4) \quad Z_0(v; i\kappa) = \sqrt{(1 + \kappa^2)} \cdot Z_3 \left(v \cdot \sqrt{(1 + \kappa^2)} ; \frac{\kappa}{\sqrt{(1 + \kappa^2)}} \right) ;$$

$$Z_1(v; i\kappa) = \sqrt{(1 + \kappa^2)} \cdot Z_1 \left(v \cdot \sqrt{(1 + \kappa^2)} ; \frac{\kappa}{\sqrt{(1 + \kappa^2)}} \right) ;$$

$$Z_2(v; i\kappa) = \sqrt{(1 + \kappa^2)} \cdot Z_2 \left(v \cdot \sqrt{(1 + \kappa^2)} ; \frac{\kappa}{\sqrt{(1 + \kappa^2)}} \right) ;$$

$$Z_3(v; i\kappa) = \sqrt{(1 + \kappa^2)} \cdot Z_0 \left(v \cdot \sqrt{(1 + \kappa^2)} ; \frac{\kappa}{\sqrt{(1 + \kappa^2)}} \right).$$

Literatúra

- [1] *Magnus W., Oberhettinger F.*: Formeln und Sätze für die speziellen Funktionen der mathematischen Physik. 2. Auflage. Berlin — Göttingen — Heidelberg 1948.
[2] *Chrapan J.*: Transformácia Jacobiho transcendent druheho druhu na tvar s reálnym argumentom. *Matematicko-fyzikálny časopis SAV*, 11, 4, 1961; str. 243 až 249.

Резюме

ТРАНСФОРМАЦИЯ ДЗЕТА-ФУНКЦИЙ ЯКОБИ
НА ФОРМУ С ВЕЩЕСТВЕННЫМ МОДУЛЕМ

Ян Храпан (JÁN CHRAPAN)

На основании соотношений (1) выводятся с помощью дзета-функций Якоби [2; (1) и (2)] отношения (2). Из них субституциями [1; стр. 143] получаются уравнения (3), или трансформационные отношения дзета-функций Якоби на форму с вещественным модулем (4).

Summary

TRANSFORMATION OF JACOBI ZETA FUNCTIONS TO THE FORM
WITH REAL MODULUS

JÁN CHRAPAN

On the basis of relations (1), the relations (2) by means of Jacobi zeta functions [2; (1) and (2)] are derived. By means of the substitutions [1; page 143] the equations (3), or the transformative relations of Jacobi zeta functions, to the form with real modulus (4), are worked out.

Adresa autora: Prof. RNDr. *Ján Chrapan*, Katedra teoretickej fyziky Prírodovedeckej fakulty Univerzity Komenského, Bratislava, Šmeralova 2b.