Aplikace matematiky

Bohumil Vybíral

Lösung einiger Integrale in der relativistischen Physik

Aplikace matematiky, Vol. 14 (1969), No. 2, 115--119

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/103214`

LÖSUNG EINIGER INTEGRALE IN DER RELATIVISTISCHEN PHYSIK

BOHUMIL VYBÍRAL

(Eingegangen am 10. October 1967)

In der relativistischen Physik kann man dem Integral vom Typus

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin^m x}{\sqrt{(1 - \beta^2 \sin^2 x)}} \mathrm{d}x \equiv I_m\,, \quad m = 0, 1, 2, \ldots \tag{1}$$

begegnen, wo $\beta = v/c < 1$ das Verhältnis der Geschwindigkeit des Objekts, bzw. seines Teiles zur Geschwindigkeit des Lichtes ist. So z.B. benötigt man den analytischen Ausdruck des Integralwertes (1) für $m = 3$ und $\beta^2 \to 1$ zur Berechnung des Spins und des magnetischen Momentes eines sphärischen relativistischen Elektronenmodells. Besondere Fälle des Integrals (1) für $m = 0$ und $m = 2$ sind vollständige elliptische Integrale erster und dritter Gattung.

Die Genaue Lösung des gemeinen Integrals (1) für $\beta^2 \to 1$ ist nicht bekannt. Versuchen wir die approximative Lösung dieses Integrals für den Fall $\beta^2 \to 1$. Dann können wir den Nenner des Integrals, für welchen wir die Bezeichnung

$$\sqrt{(1 - \beta^2 \sin^2 x)} \equiv f_\beta(x) \tag{2}$$

einführen, durch die Funktion

$$f(x) = \cos x \tag{3}$$

ersetzen. Das Berchnen des Integrals (1) überführen wir also auf die Berechnung des Integrals

$$\int_{x_0}^{x_1} \frac{\sin^m x}{\cos x} \mathrm{d}x \equiv I'_m\,. \tag{4}$$

Die Integrationsgrenzen x_0, x_1 in diesem ersetzenden Integral versuchen wir als Werte des Arguments der Substitutionsfunktion (3) bestimmen, für welche diese

Funktion die Werte erreicht, welche aritmetische Mitten der ursprünglichen Funktion und der Substitutionsfunktion (3) in den Punkten 0, $\pi/2$ der Grenzen im ursprünglichen Integral (1) sind. Wir bekommen also

$$x_0 = \arccos \frac{f(0) + f_\beta(0)}{2} = \arccos 1 = 0\,, \tag{5}$$

(6)
$$x_1 = \arccos \frac{f(\pi/2) + f_\beta(\pi/2)}{2} = \arccos \frac{1}{2}\sqrt{(1 - \beta^2)} = \frac{\pi}{2} - \arcsin \frac{1}{2}\sqrt{(1 - \beta^2)}\,.$$

Die Berechtigung der Ersetzung des Integrals (1) durch das Integral (4) zeigen wir im Weiteren. Man kann erwarten, dass wir vom ersetzenden Integral (4) das genaueste Ergebnis für $m = 0$ erreichen, weil im Integral (1) nur der Nenner des Integrands substituiert wurde.

Errechnen wir nur die Werte des Integrals (1) für $\beta^2 \to 1$ und für die einzelnen Werte des Exponents m.

Für $m = 0$ bekommen wir

$$\begin{aligned} I_0 \equiv \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sqrt{(1 - \beta^2 \sin^2 x)}} &\approx \int_0^{x_1} \frac{dx}{\cos x} = \left[\ln \left| \operatorname{tg} \frac{1}{2}\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\right|\right]_0^{x_1} = \\ &= \left[\frac{1}{2} \ln \frac{1 + \sin x}{1 - \sin x}\right]_0^{x_1} = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + \frac{1}{2}\sqrt{(3 + \beta^2)}}{1 - \frac{1}{2}\sqrt{(3 + \beta^2)}} = \\ &= \ln \frac{2 + \sqrt{(3 + \beta^2)}}{\sqrt{(1 - \beta^2)}} \approx \ln \frac{4}{\sqrt{(1 - \beta^2)}}\,, \end{aligned} \tag{7}$$

für $m = 1$

(8)
$$I_1 \equiv \int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{\sqrt{(1 - \beta^2 \sin^2 x)}}\, dx \approx \int_0^{x_1} \operatorname{tg} x\, dx = [-\ln |\cos x|]_0^{x_1} = \ln \frac{2}{\sqrt{(1 - \beta^2)}}\,.$$

Da für $m > 1$ und für $\cos x \neq 0$ gilt (siehe z.B. [1])

$$\int \frac{\sin^m x}{\cos x}\, dx = -\frac{\sin^{m-1} x}{m - 1} + \int \frac{\sin^{m-2} x}{\cos x}\, dx$$

und da

$$\frac{\sin^{m-1} x_1}{m - 1} = \frac{1}{m - 1}\left(\frac{3 + \beta^2}{4}\right)^{(m-1)/2}\,,$$

bekommen wir für $m = 2n$, wo n natürliche Zahlen sind, die Lösung

$$I_{2n} \equiv \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^{2n} x}{\sqrt{(1 - \beta^2 \sin^2 x)}}\, dx \approx \tag{9}$$

$$\approx \ln \frac{2 + \sqrt{(3 + \beta^2)}}{\sqrt{(1 - \beta^2)}} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k - 1} \left(\frac{3 + \beta^2}{4}\right)^{(2k-1)/2} \approx$$

$$\approx \ln \frac{4}{\sqrt{(1 - \beta^2)}} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k - 1}$$

und für $m = 2n + 1$ die Lösung

$$I_{2n+1} \equiv \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^{2n+1} x}{\sqrt{(1 - \beta^2 \sin^2 x)}} \, dx \approx \tag{10}$$

$$\approx \ln \frac{2}{\sqrt{(1 - \beta^2)}} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k} \left(\frac{3 + \beta^2}{4}\right)^{k} \approx \ln \frac{2}{\sqrt{(1 - \beta^2)}} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k} .$$

Zwischen den approximativen Werten des Integfrals (1) sind also diese Relationen

$$I'_{2n} = I'_{2(n-1)} - \frac{1}{2n - 1} \left(\frac{3 + \beta^2}{4}\right)^{(2n-1)/2} \approx I'_{2(n-1)} - \frac{1}{2n - 1} ,$$

$$I'_{2n+1} = I'_{2n-1} - \frac{1}{2n} \left(\frac{3 + \beta^2}{4}\right)^{n} \approx I'_{2n-1} - \frac{1}{2n} .$$

Die Berechtigung der Überleitung des Lösens des Integrals (1) für $\beta^2 \to 1$ auf die Lösung des Integrals (4) kann man für den Fall des Integrals für $m = 1$, dessen Lösung bekannst ist, und für die Fälle der Integrale für $m = 0$ und $m = 2$, welche vollständige elliptische Integrale erster und dritter Gattung darstellen, beglaubigen.

Die genaue Lösung für $m = 1$ ist (siehe z.B. [1])

$$I_1 \equiv \int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{\sqrt{(1 - \beta^2 \sin^2 x)}} \, dx = \left[- \frac{1}{\beta} \ln \left|\beta \cos x + \sqrt{(1 - \beta^2 \sin^2 x)}\right| \right]_0^{\pi/2} =$$

$$= \frac{1}{\beta} \ln \frac{1 + \beta}{\sqrt{(1 - \beta^2)}} .$$

Für $\beta \to 1$ können wir dieses Ergebnis in der Form (8) schreiben.

Für $m = 0$ (vollständiges elliptisches Integral erster Gattung – $\boldsymbol{K}$) und für $m = 2$ (vollständiges elliptisches Integral dritter Gattung – $\boldsymbol{D}$) können wir schreiben (siehe [2]):

$$\boldsymbol{K} \equiv \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sqrt{(1 - \beta^2 \sin^2 x)}} = \Lambda + \frac{\Lambda - 1}{4} k'^2 + \frac{9}{64} \left(\Lambda - \frac{7}{6}\right) k'^4 + \ldots ,$$

$$\boldsymbol{D} \equiv \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 x}{\sqrt{(1 - \beta^2 \sin^2 x)}} \, dx =$$

$$= \Lambda - 1 + \frac{3}{4} \left(\Lambda - \frac{4}{3}\right) k'^2 + \frac{45}{64} \left(\Lambda - \frac{41}{30}\right) k'^4 + \ldots ,$$

wo $\Lambda = \ln(4/k')$ und $k' = \sqrt{(1 - \beta^2)}$. Für $\beta^2 \to 1$ und also für $k' \to 0$ bekommen wir die Ergebnisse (7) und (9) – im Ergebins (9) müssen wir aber $n = 1$ $(m = 2)$ legen.

Für $m > 2$ (bis $m = 8$) wuredn die Ergebnisse durch numerische Integration mit Benützung der Simpsonschen Formel (parabolische Formel) kontrolliert. Für die

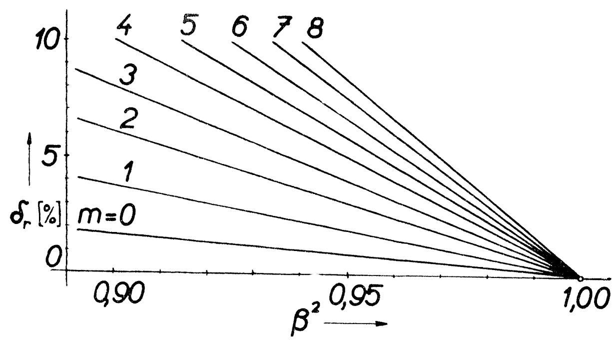

Abb. 1.

Beurteilung der Genauigkeit der approximativen Lösung des Integrals (1) ist in Abb. 1 die Abhängigkeit des relativen Fehlers

$$\delta_r = \frac{I_m - I'_m}{I_m} 100\%$$

auf β^2 für $m \in [0, 8]$ angeführt.

Ebenso kann man das Integral des Typs

$$(11) \qquad \int_0^{\pi/2} \frac{\cos^m x'}{\sqrt{(1 - \beta^2 \cos^2 x')}} \, dx' \,, \quad m = 0, 1, 2, \ldots,$$

für $\beta^2 \to 1$ lösen. Dieses Integral kann man durch Substitution $x' = \pi/2 - x$ auf das Integral (1) überleiten.

Literatur

[1] *Dwight H. B.:* Tables of Integrals and Other Mathematical Data, New York, 1961.

[2] *Janke, Emde, Lösch:* Tafeln höherer Funktionen, Stuttgart, 1960.

Souhrn

ŘEŠENÍ NĚKTERÝCH INTEGRÁLŮ V RELATIVISTICKÉ FYZICE

BOHUMIL VYBÍRAL

V práci je ukázáno, že řešení integrálu

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin^m x}{\sqrt{(1 - \beta^2 \sin^2 x)}} \, dx \equiv I_m , \quad m = 0, 1, 2, \ldots ,$$

kde $\beta = v/c < 1$ je poměr rychlosti objektu, resp. jeho části, k rychlosti světla, je možno pro $\beta^2 \to 1$ převést na řešení integrálu

$$\int_0^{x_1} \frac{\sin^m x}{\cos x} \, dx \equiv I'_m ,$$

kde

$$x_1 = \arccos \tfrac{1}{2} \sqrt{(1 - \beta^2)} .$$

V práci je podáno řešení tohoto integrálu pro $m = 0$, $m = 1$, $m = 2n$ a $m = 2n + 1$, kde $n = 1, 2, 3, \ldots$ Pro posouzení přesnosti přibližného řešení je numericky vyhodnocena relativní chyba

$$\delta_r = \frac{I_m - I'_m}{I_m} \, . \, 100\%$$

v závislosti na β^2 pro $m \in [0,8]$.

Anschrift des Verfassers: Ing. *Bohumil Vybíral*, CSc., katedra fyziky 1. fakulty Vojenské akademie Ant. Zápotockého, Vyškov 3.