Josef Čermák

Algoritmy. 20. CHOLES. Řešení (2m + 1) diagonálového systému lineárních algebraických rovnic Choleského metodou

Aplikace matematiky, Vol. 14 (1969), No. 6, 517--519

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/103258`

ALGORITMY

20. CHOLES

ŘEŠENÍ $(2m + 1)$ DIAGONÁLOVÉHO SYSTÉMU LINEÁRNÍCH ALGEBRAICKÝCH ROVNIC CHOLESKÉHO METODOU

J. ČERMÁK, Katedra fyziky Vysoké školy chemicko-technologické, Pardubice, Leninovo nám. 565

```
procedure CHOLES (n, m, a) result: (y);
  integer n, m; real procedure a; array y;

comment n je počet rovnic, m šíře pásu nenulových koeficientů vedle hlavní diagonály,
a funkční procedura pro určení nenulových hodnot prvků a(i, j) matice v pásu,
y[1 : n] je vektor výsledku;

begin integer i, j, jj, k, kk, kkk, k1, k2, l; real r, s;
real array b[1 : m + 1], c[1 : m × n − m × (m + 1)/2];
kk := 0;
for i := 1 step 1 until n do
begin l := if i ≦ m then i else m + 1;
  k := if i > n − m then n − i else m;
  kk := kk + (if i > n − m + 1 then i − n + m − 1 else 0);
  for j := i − l + 1 step 1 until i do
    begin s := 0; kkk := 0;
      for jj := m + 2 − l step 1 until m + j − i do
        begin k1 := jj − m + i − 1;
          kkk := kkk + (if k1 > n − m + 1 then k1 − n + m − 1 else 0);
            s := s + b[jj] × c[(m − 1) × k1 − m + j − kkk]
      end jj;
      b[m − i + j + 1] := a(i, j) − s
  end j;
  r := 1/b[m + 1];
```

```
for j := 1 step 1 until k do
  begin s := 0; kkk := 0;
    for jj := j + 1 step 1 until m do
      begin k1 := jj − m + i − 1;
        kkk := kkk + (if k1 > n − m + 1 then k1 − n − m − 1 else 0);
        k2 := (m − 1) × k1 − m + j − kkk + i;
      if k2 > 1 then s := s + b[jj] × c[k2]
      end jj;
    c[m × (i − 1) + j − kk] := (a(i, i + j) − s) × r
  end j;
s := 0;
for j := m + 2 − l step 1 until m do s := s + b[j] × y[i + j − m − 1];
y[i] := (a(i, n + 1) − s) × r
end i, konec přímého chodu;
for i := n step − 1 until 1 do
  begin s := 0;
    k  := if i > n − m        then n else i + m;
    kk := if i > n − m + 1 then entier ((i − n + m − 1) × (i − n + m)/2)
      else 0;
    for j := i + 1 step 1 until k do
      s := s + y[j] × c[(i − 1) × m + j − i − kk];
    y[i] := y[i] − s
  end konec obráceného chodu
end proc CHOLES;
```

Metoda předpokládá čtení případně postupný výpočet hodnot prvků na hlavní diagonále a $2m$ diagonálách podél ní, dále pak n prvků vektoru pravých stran. Do paměti stroje ukládá místo n^2 prvků matice jen pás šíře m odpovídající horní trojúhelníkové matici tj. $m \times n - m \times (m + 1)/2$ prvků. Metoda je proto velmi užitečná např. při řešení rozsáhlých systémů diferenčních rovnic. Na počítači Odra 1013 bylo možno řešit systém 400 diferenčních rovnic ($m = 12$). Kapacita paměti uvedeného počítače by při použití přímých klasických metod řešení zdaleka na výpočet nestačila.

Kontrolní příklad:

Je dán systém rovnic:

$$(*)\qquad \begin{aligned} 3x_1 - 2x_2 \qquad\qquad\qquad &= -\ 1\\ 3x_1 + 4x_2 - x_3 \qquad\qquad &= \quad 8\\ 2x_2 \qquad - 4x_4 \qquad &= -12\\ x_3 - 4x_4 + 2x_5 &= -\ 3\\ 5x_4 + 4x_5 &= \quad 0 \end{aligned}$$

Funkční procedure programu pro řešení tohoto příkladu spočívá v přečtení jednoho čísla na pásce dat a dosazení za $a(i, j)$.

Páska vstupních dat obsahuje tyto hodnoty:

$5(n)$ počet rovnic,

$1(m)$ poloviční počet nenulových vedlejších diagonál,

Prvky pásu a pravé strany soustavy $(*)$:

$$a(i,j)\left\{\begin{array}{rrrr} 3 & -2 & -1 & \\ 3 & 4 & -1 & 8\\ 2 & 0 & -4 & -12\\ 1 & -4 & 2 & -3\\ 5 & -4 & 0 & \end{array}\right.$$

Výsledek: $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$, $x_4 = 4$, $x_5 = 5$.

V tomto konkrétním příkladě byla pro matici systému reservována 4 pamětová místa, pět míst pak pro vektor pravých stran. Při řešení plných systémů rovnic je nutno položit $m = n - 1$. V tomto případě je úspora kapacity paměti přibližně 50% vůči klasickým přímým metodám.

Literatura

Д. К. Фадеев, Б. Н. Фадеева: Вычислительные методы линейной алгебры. ФИЗМАТГИЗ, Москва 1963, Ленинград.