Jaroslav Morávek; Milan Vlach

Über Netzwerke mit eindeutig bestimmtem Fluss

Aplikace matematiky, Vol. 15 (1970), No. 1, 10--17

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/103263`

ÜBER NETZWERKE MIT EINDEUTIG BESTIMMTEM FLUSS

JAROSLAV MORÁVEK und MILAN VLACH

(Eingegangen am 16. Mai 1968)

1. Einleitung. Es wird das folgende Netzwert untersucht: Sei N eine endliche nichtleere Menge. Die Elemente von N heissen Knotenpunkte und die geordneten Paare $(x, y) \in N \times N$ Bögen. Sei jedem Knotenpunkt $x \in N$ ein Paar von reellen Zahlen $\alpha(x)$, $\beta(x)$ und jedem Bogen (x, y) eine reelle Zahl $c(x, y)$ zugeordnet, wobei

$$
(1) \qquad \begin{cases} -\infty \leqq \alpha(x) < +\infty, \; -\infty < \beta(x) \leqq +\infty & \text{für alle} \quad x \in N \\ -\infty < c(x, y) \leqq +\infty & \text{für alle} \quad (x, y) \in N \times N \\ c(x, x) = 0 & \text{für alle} \quad x \in N \end{cases}
$$

gilt.

Das geordnete Quadrupel (N, c, α, β) der oben beschriebenen Objekte heisst Netzwerk. Eine endliche reellwertige Funktion $f(x, y)$ der Bögen heisst Fluss auf dem Netzwert, wenn die folgenden Beziehungen erfüllt sind:

$$
(2) \qquad \begin{cases} f(x, y) = -f(y, x) & \text{für alle} \quad (x, y) \in N \times N \\ \alpha(x) \leqq \sum_{y \in N} f(x, y) \leqq \beta(x) & \text{für alle} \quad x \in N \\ f(x, y) \leqq c(x, y) & \text{für alle} \quad (x, y) \in N \times N \, . \end{cases}
$$

Im Absatz 2, der einen vorbereitenden Charakter hat, wird die notwendige und hinreichende Bedingung für die Existenz eines Flusses auf dem Netzwerk (N, c, α, β) formuliert (Satz 1). Dieser Satz ist analog zu den Bedingungen, die von anderen Verfassern gefunden wurden (vgl. [1], [2], [3] u.a.). Im Absatz 3 wird ein Iterationsverfahren beschrieben, das analog mit dem in [4] zur Untersuchung des Dreiindextransportproblems benutzten Verfahren ist. In dieser Arbeit werden gewisse notwendigen und hinreichenden Bedingungen für die Existenz und Eindeutigkeit des Flusses mit Hilfe dieses Iterationsverfahrens formuliert (Satz 2).

2. Die notwendigen und hinreichenden Bedingungen für die Existenz eines Flusses. Man führt zuerst eine geeignete Bezeichnung (vgl. [1], [2]) ein. Sei X eine endliche Menge und sei $a(x)$ für $x \in X$ eine reellwertige Funktion. Man setzt

$$
a(A) = \sum_{x \in A} a(x) \quad \text{für} \quad A \subset X \, .
$$

Ähnlicherweise, wenn $z(x, y)$ eine Funktion von zwei Veränderlichen $x, y \in X$ ist, so setzt man

$$z(A, B) = \sum_{x \in A} \sum_{y \in B} z(x, y) \quad \text{für} \quad A \subset X, B \subset X .$$

Als Sonderfall folgt aus der Definition $a(\emptyset) = z(A, \emptyset) = z(\emptyset, A) = 0$. Ferner, statt $z(\{x_0\}, B)$ und $z(A, \{y_0\})$ schreibt man $z(x_0, B)$ bzw. $z(A, y_0)$. So kann man z. B. die Bedingungen

$$\alpha(x) \leqq \sum_{y \in N} f(x, y) \leqq \beta(x),$$

welche in der Definition des Flusses auftreten, folgendermassen schreiben:

$$\alpha(x) \leqq f(x, N) \leqq \beta(x).$$

Der Satz über die Existenz eines Flusses auf dem Netzwerk (N, c, α, β) lautet folgendermassen:

Satz 1. *Ein Fluss $f(x, y)$ existiert genau dann, wenn die folgenden Bedingungen erfuellt sind:*

(3) $$\alpha(x) \leqq \beta(x) \quad \textit{für alle} \quad x \in N$$

(4) $$c(x, y) + c(y, x) \geqq 0 \quad \textit{für alle} \quad (x, y) \in N \times N$$

(5) $$S \cap S' = \emptyset \;\&\; S \cup S' = N \Rightarrow c(S, S') \geqq \max\,[\alpha(S), -\beta(S')]$$

Beweis. A) Notwendigkeit. Die Bedingungen (3), (4) sind offensichtlich notwendig. Die Bedingungen (5) folgen folgendermassen:

$$\begin{aligned} &c(S, S') \geqq f(S, S') \\ &f(S, S') = f(S, N) \geqq \alpha(S) \\ &f(S, S') = -f(S', N) \geqq -\beta(S'). \end{aligned}$$

B) Hinlaenglichkeit. Zuerst beweist man den folgenden Hilfsatz: *Gelten die Bedingungen* (3), (4), (5) *des Satzes 1, dann existiert eine reellwertige Funktion $f(x, y)$ der Bögen des Netzwerkes, welche die folgenden Eigenschaften hat:*

(6) $$f(x, y) = -f(y, x) \qquad \textit{für alle} \quad x \in N, y \in N$$

(7) $$\alpha(x) \leqq f(x, N) \leqq \beta(x) \;\; \textit{für alle} \quad x \in N$$

(8) $$V(f) \overset{\text{df.}}{=} \sum_{x \in N} \sum_{y \in N} \max\,[0, f(x, y) - c(x, y)] \;\; \textit{ist minimal.}$$

Beweis des Hilfsatzes. Zuerst zeigt man, dass das Problem der mathematischen Optimierung (6), (7), (8) eine zulässige Lösung hat. Es folgt aus der Bedingung (5) des Satzes 1, dass

$$\alpha(N) \leqq 0 \leqq \beta(N) \text{ gilt}.$$

Daraus folgt ferner, dass solche Zahlen $\gamma(x)$ existieren, für welche

$$\alpha(x) \leqq \gamma(x) \leqq \beta(x) \quad \text{falls} \quad x \in N$$

und

$$\gamma(N) = 0\,.$$

Jetzt zeigt man, dass eine Funktion $\hat{f}(x, y)$ existiert, wobei

$$\text{(9)} \qquad \begin{cases} \hat{f}(x, y) = \hat{f}(y, x)\,, \\ \hat{f}(x, N) = \gamma(x) \end{cases}$$

gilt. Man schreibt die Menge N in der Form $N = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ ein und setzt

$$\left.\begin{aligned} \hat{f}(x_j, x_{j+1}) &= \gamma(x_1) + \ldots + \gamma(x_j) \\ \hat{f}(x_{j+1}, x_j) &= -(\gamma(x_1) + \ldots + \gamma(x_j)) \end{aligned}\right\} \quad \text{für} \quad j = 1, 2, \ldots, n-1$$

und $\hat{f}(x, y) = 0$ für alle anderen Bögen (x, y). Die Funktion $\hat{f}$ erfüllt offensichtlich die Beziehungen (9). Das Optimierungsproblem (6), (7), (8) ist zwar nichtlinear, aber es kann durch das Einführen neuer Veränderlichen $\lambda(x, y)$ $((x, y) \in N \times N)$ auf eine lineare Optimierungsaufgabe transformiert werden; wir setzen dabei

$$V(f, \lambda) \overset{\text{df.}}{=} \sum_{x \in N} \sum_{y \in N} \lambda(x, y)$$

und wir kommen zur folgenden äquivalenten linearen Optimierungsaufgabe: Es ist die Funktion $V(f, \lambda)$ zu minimieren unter den Bedingungen (6), (7) und

$$\lambda(x, y) \geqq 0\,, \quad \lambda(x, y) \geqq f(x, y) - c(x, y)\,.$$

Das letzte Linearprogramm hat eine zulässige Lösung und es gilt ausserdem $V(f, \lambda) \geqq 0$. Daraus folgt, dass eine solche Funktion existiert, für welche die Bedingungen (6), (7) und (8) erfüllt sind. Der Beweis des Hilfsatzes ist beendet.

Jetzt beweist man die Behauptung des Satzes 1. Nehmen wir an, dass kein Fluss im Netzwerk (N, c, α, β) existiert und dass auf dem Grund des Hilfsatzes eine solche Funktion f existiert, dass $V(f) > 0$ und $V(f) = \min$. Dann existiert ein solcher Bogen (x_0, x_1), dass

$$x_0 \neq x_1\,, \quad f(x_0, x_1) > c(x_0, x_1)\,.$$

Da man angenommen hat, dass $V(f)$ minimal ist, muss wenigstens einer der beiden folgenden Fälle eintreten:

$$\text{B1)} \quad f(x_0, N) = \alpha(x_0)\,,$$

oder

$$\text{B2)} \quad f(x_1, N) = \beta(x_1)\,.$$

Man betrachtet zuerst den Fall B1). Man führt die folgende Menge S ein:

$x \in S \Leftrightarrow \{x \in N$ und eine solche Folge $(y_0, y_1, \ldots, y_k)$ von paarweise verschiedenen Knotenpunkten existiert, dass $y_0 = x_0$, $y_k = x$ und $f(y_j, y_{j+1}) < c(y_j, y_{j+1})$ für $j = 0, 1, \ldots, k - 1$ gilt.$\}$

Ferner setzt man $S' = N - S$. Es ergibt sich definitionsgemäss

$$x_0 \in S\,, \quad x_1 \in S'\,,$$
$$f(x, N) = \alpha(x) \quad \text{falls} \quad x \in S \quad \text{und}$$
$$f(x, y) \geqq c(x, y) \quad \text{falls} \quad (x, y) \in S \times S'\,.$$

(Wenn das letzte nicht gälte, könnte man den Wert $V(f)$ im Widerspruch zur Voraussetzung vermindern.) Nun hat man

$$\alpha(S) = f(S, N) = f(S, S') = f(x_0, x_1) + [f(S, S') - f(x_0, x_1)] \geqq$$
$$\geqq f(x_0, x_1) + [c(S, S') - c(x_0, x_1)] > c(x_0, x_1) + [c(S, S') - c(x_0, x_1)] = c(S, S')\,.$$

Das ist im Widerspruch zur Bedingung (5).

Im Falle B2) konstruiert man analog ein Paar der Mengen S, S', für welche

$$S \cap S' = \emptyset\,, \quad S \cup S' = N\,, \quad -\beta(S') > c(S, S')$$

gilt. Der Beweis des Satzes 1 ist vollständig.

B e m e r k u n g. Nach dem Beweis kann man einen Algorithmus konstruieren. Dieser Algorithmus ermöglicht im Falle, dass alle Werte $c(x, y)$, $\alpha(x)$, $\beta(x)$ entweder rational oder $+\infty$ bzw. $-\infty$ sind, in endlich vielen Schritten zu entscheiden, ob ein Fluss im Netzwerk (N, c, α, β) existiert, und einen Fluss findet. Im Verlauf des Algorithmus ist es geeignet die Zeichnungsprozedur von Ford und Fulkerson zu benutzen [1].

3. Kriterium für die Eindeutigkeit des Flusses. Man setzt

$$m^{(0)}(x, y) = c(x, y) \quad \text{für alle} \quad (x, y) \in N \times N$$

und

$$m^{(r+1)}(x, y) = \min\,[m^{(r)}(x, y),\ -\alpha(y) + m^{(r)}(y, N - \{x\}),\ \beta(x) + m^{(r)}(N - \{y\}, x)]$$

für alle $(x, y) \in N \times N$, $r = 0, 1, 2, \ldots$ Im folgenden Hilfsatz wird der Zusammenhang zwischen dem Fluss und der Folge $\{m^{(r)}(x, y)\}_{r=0,1,\ldots}$ untersucht.

Hilfsatz. *Falls ein Fluss $f(x, y)$ existiert, dann gilt*

$$f(x, y) \leqq \lim_{r \to \infty} m^{(r)}(x, y) \leqq \ldots \leqq m^{(1)}(x, y) \leqq m^{(0)}(x, y)$$

für alle $(x, y) \in N \times N$.

Beweis. Die Ungleichung $m^{(r+1)}(x, y) \leqq m^{(r)}(x, y)$ ist klar. Man beweist nun:

$$f(x, y) \leqq m^{(r)}(x, y) \quad \text{für} \quad (x, y) \in N \times N .$$

Diese Behauptung ist für $r = 0$ klar. Gelten die Beziehungen

$$f(x, y) \leqq m^{(r)}(x, y)$$

für alle $(x, y) \in N \times N$, so hat man

$$f(x, y) = f(N, y) - f(N - \{x\}, y) = -f(y, N) + f(y, N - \{x\}) \leqq$$
$$\leqq -\alpha(y) + m^{(r)}(y, N - \{x\}) ,$$
$$f(x, y) = f(x, N) + f(N - \{y\}, x) \leqq \beta(x) + m^{(r)}(N - \{y\}, x)$$

und $f(x, y) \leqq m^{(r+1)}(x, y)$ für alle $(x, y) \in N \times N$.

Bemerkung 1. Im Falle, dass jeder der Werte $c(x, y)$, $\alpha(x)$ und $\beta(x)$ entweder eine rationale Zahl oder $+\infty$ bzw. $-\infty$ ist und die Bedingung des Hilfsatzes erfüllt wird, so existiert ein solches r_0, dass $m^{(r_0)}(x, y) = m^{(r_0+1)}(x, y) = m^{(r_0+2)}(x, y) = = \dots$ für alle $(x, y) \in N \times N$.

Bemerkung 2. Der Hilfsatz bedeutet eine notwendige Bedingung für die Existenz eines Flusses. Diese Bedingung ist aber nicht hinreichend, wie aus dem in [5] untersuchten Beispiel folgt.

Jetzt haben wir den folgenden.

Satz 2. *Das Problem der Bestimmung eines Flusses ist genau dann eindeutig lösbar, wenn der Grenzwert*

$$m(x, y) = \lim_{r \to \infty} m^{(r)}(x, y)$$

existiert und $m(x, y) + m(y, x) = 0$ für alle $(x, y) \in N \times N$ gilt.

Beweis. A) Hinlänglichkeit. Es ergibt sich leicht aus der Definition der Folge $\{m^{(r)}(x, y)\}_{r=0}^{+\infty}$, dass der Grenzwert $m(x, y)$ die Eigenschaft (2) eines Flusses erfüllt. Also $m(x, y)$ ist ein Fluss in (N, c, α, β). Ist jetzt $f(x, y)$ ein beliebiger Fluss in (N, c, α, β), so hat man:

1) $f(x, y) \leqq m(x, y)$ für alle $(x, y) \in N \times N$ (nach dem Hilfsatz),

2) $0 = f(x, y) + f(y, x) \leqq m(x, y) + m(y, x) = 0$ für alle $(x, y) \in N \times N$.

Aus den Beziehungen 1) und 2) folgt unmittelbar, dass

$$f(x, y) = m(x, y)$$

für alle $(x, y) \in N \times N$ gilt.

B) Notwendigkeit. Nehmen wir an, dass die Bedingung des Satzes nicht erfüllt ist, und dass ein Fluss $f(x, y)$ existiert. Man will zeigen, dass diese Voraussetzung zum Widerspruch führt. Nach dem Hilfsatz existiert der Grenzwert

$$m(x, y) = \lim_{r \to \infty} m^{(r)}(x, y)$$

und nach der Voraussetzung ein Bogen (x_0, x_1), mit $x_0 \neq x_1$ und $f(x_0, x_1) < m(x_0, x_1)$. Sei $(y_0, y_1, \ldots, y_k)$ die längste Folge von paarweise verschiedenen Knotenpunkten, für welche die Beziehungen

$$f(y_{j-1}, y_j) < m(y_{j-1}, y_j)$$

für $j = 1, 2, \ldots, k$ gelten. Man muss jetzt die folgenden drei Fälle untersuchen.

I) $f(y_0, N) < \beta(y_0)$ und $f(y_k, N) > \alpha(y_k)$. In diesem Falle existiert eine solche positive Zahl ε, dass die Beziehungen

$$\tilde{f}(y_{j-1}, y_j) = f(y_{j-1}, y_j) + \varepsilon \quad \text{für} \quad j = 1, 2, \ldots, k\,,$$
$$\tilde{f}(y_j, y_{j-1}) = f(y_j, y_{j-1}) - \varepsilon \quad \text{für} \quad j = 1, 2, \ldots, k\,,$$

und

$$\tilde{f}(x, y) = f(x, y)$$

für alle anderen Bögen, einen von f verschiedenen Fluss $\tilde{f}$ definieren.

II) $f(y_0, N) = \beta(y_0)$. In diesem Falle gilt $f(N - \{y_1\}, y_0) = [f(N - \{y_1\}, y_0) + \beta(y_0)] - \beta(y_0) = f(y_0, y_1) - \beta(y_0) < m(y_0, y_1) - \beta(y_0) \leqq m(N - \{y_1\}, y_0)$ und es existiert also ein Bogen (y_{-1}, y_0) für den die Beziehungen $y_{-1} \neq y_0, y_{-1} \neq y_1$ und $f(y_{-1}, y_0) < m(y_{-1}, y_0)$ gelten. Wegen der Voraussetzung, dass die Folge $y_0, y_1, \ldots, y_k$ die maximale Länge hat, gilt die Beziehung $y_{-1} = y_l$ für ein l, mit $1 \leqq l \leqq k$. Dann existiert eine solche positive Zahl ε, dass die Beziehungen

$$\tilde{f}(y_{j-1}, y_j) = f(y_{j-1}, y_j) + \varepsilon \text{ für } j = 0, 1, \ldots, l$$
$$\tilde{f}(y_j, y_{j-1}) = f(y_j, y_{j-1}) - \varepsilon \text{ für } j = 0, 1, \ldots, l$$

und

$$\tilde{f}(x, y) = f(x, y)$$

für alle anderen Bögen, einen von f verschiedenen Fluss $\tilde{f}$ definieren.

III) $f(y_k, N) = \alpha(y_k)$. Analog wie im Falle II konstruiert man auch in diesem Falle einen von f verschiedenen Fluss $\tilde{f}$. Der Beweis ist vollständig.

Beispiel 1 (Eine eindeutig lösbare Aufgabe)

$$N = \{x_1, x_2, x_3\}\,, \quad \alpha(x_1) = 0\,, \quad \alpha(x_2) = 1\,, \quad \alpha(x_3) = -1\,,$$
$$\beta(x_1) = 4\,, \quad \beta(x_2) = 5\,, \quad \beta(x_3) = 2\,,$$

$$\|c(x_i, x_j)\| = \begin{Vmatrix} 0, 0, 0 \\ 1, 0, 3 \\ 7, 2, 0 \end{Vmatrix} = \|m^{(0)}(x_i, x_j)\|$$

$$\|m^{(1)}(x_i, x_j)\| = \begin{Vmatrix} 0, 0, 0 \\ 0, 0, 3 \\ 0, 0, 0 \end{Vmatrix}, \quad \|m^{(r)}(x_i, x_j)\| = \begin{Vmatrix} 0, & 0, 0 \\ 0, & 0, 1 \\ 0, & -1, 0 \end{Vmatrix} \quad (r = 2, 3, \ldots),$$

$$\|m(x_i, x_j)\| = \begin{Vmatrix} 0, & 0, 0 \\ 0, & 0, 1 \\ 0, & -1, 0 \end{Vmatrix} = \|f(x_i, x_j)\|$$

Beispiel 2 (Aufgabe mit mehreren Flüssen).

$$N = \{x_1, x_2, x_3\}, \quad \alpha(x_1) = 0, \quad \alpha(x_2) = 1, \quad \alpha(x_3) = -1$$
$$\beta(x_1) = 4, \quad \beta(x_2) = 5, \quad \beta(x_3) = 2$$

$$\|c(x_i, x_j)\| = \begin{Vmatrix} 0, 4, 2 \\ 1, 0, 3 \\ 7, 2, 0 \end{Vmatrix} = \|m^{(0)}(x_i, x_j)\|$$

$$\|m^{(1)}(x_i, x_j)\| = \begin{Vmatrix} 0, 2, 2 \\ 1, 0, 3 \\ 4, 0, 0 \end{Vmatrix}, \quad \|m^{(r)}(x_i, x_j)\| = \begin{Vmatrix} 0, 2, 1 \\ 1, 0, 3 \\ 2, 0, 0 \end{Vmatrix} \quad (r = 2, 3, \ldots)$$

$$\|m(x_i, x_j)\| = \begin{Vmatrix} 0, 2, 1 \\ 1, 0, 3 \\ 2, 0, 0 \end{Vmatrix}$$

Es existieren zwei verschiedene Flüsse, z.B. $f^{(1)} \neq f^{(2)}$, wo

$$\|f^{(1)}(x_i, x_j)\| = \begin{Vmatrix} 0, & 0, 0 \\ 0, & 0, 1 \\ 0, & -1, 0 \end{Vmatrix}, \quad \|f^{(2)}(x_i, x_j)\| = \begin{Vmatrix} 0, & -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}, & 0, \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2}, & -\frac{1}{2}, 0 \end{Vmatrix}.$$

Literatur:

[1] *L. R. Ford, D. R. Fulkerson:* Flows in Networks. Princeton University Press, Princeton 1962.

[2] *D. Gale:* The Theory of Linear Economic Models, McGraw-Hill Book Company, Inc. 1960.

[3] *M. Fiedler:* Dopravní problémy v sítích s omezeními. Ekonomicko-matematický obzor, 1965.

[4] *K. B. Haley:* The Multi-Index Problem, Opns. Res. 11, 1963.

[5] *J. Morávek, M. Vlach:* On the Necessary Conditions for the Existence of the Solution of the Multi-Index Transportation Problem, Opns. Res., 15, No 3, 1967.

Výtah

O SÍTÍCH S JEDNOZNAČNÝM TOKEM

JAROSLAV MORÁVEK a MILAN VLACH

V této práci jsou dokázány dvě věty o dopravních sítích. Věta 1 odstavce 2 udává jistou nutnou a postačující podmínku pro existenci toku v síti. Hlavní výsledek této práce, Věta 2 odstavce 3 poskytuje jisté algoritmické kriterium pro rozhodnutí otázky, zdali v síti existuje jediný tok.

Anschrift der Verfasser: RNDr. *Jaroslav Morávek* CSc., Matematický ústav ČSAV v Praze, Žitná 25, Praha 1, RNDr. *Milan Vlach* CSc., Matematicko-fyzikální fakulta UK, Malostranské nám. 25, Praha 1.