

Eva Kohútová

Stabilitätsbedingungen von rekurrenten Relationen und deren Anwendung

Aplikace matematiky, Vol. 15 (1970), No. 3, 207--212

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/103286>

Terms of use:

© Institute of Mathematics AS CR, 1970

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://project.dml.cz>

STABILITÄTSBEDINGUNGEN VON REKURRENTEN RELATIONEN
UND DEREN ANWENDUNG

EVA KOHÚTOVÁ

(Eingegangen am 21. Mai 1969)

Bei numerischen Berechnungen kommen häufig rekurrente Relationen in der Form

$$y_n = a_n + b_n y_{n-m} \quad \text{für } n = m, m + 1, \dots$$

mit Anfangswerten y_0, y_1, \dots, y_{m-1} vor, wo m eine fest gegebene natürliche Zahl ist, $\{a_n\}_{n=m}^\infty$ und $\{b_n\}_{n=m}^\infty$ Koeffizientenfolgen sind. Dieses ist eigentlich ein Spezialfall einer $m + 1$ -gliedrigen Relation, die in m binomen Relationen geschrieben sein kann:

$$y_{km+i} = a_{km+i} + b_{km+i} y_{km+i-1} \quad \text{für } k = 1, 2, \dots$$

mit dem Anfangswert y_i , wo $i = 0, 1, \dots, m - 1$, $\{a_{km+i}\}_{i=1}^\infty$ und $\{b_{km+i}\}_{i=1}^\infty$ die Koeffizientenfolgen darstellt, die den Folgen $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ und $\{b_n\}_{n=1}^\infty$ entnommen worden sind. Es kommt oft vor, dass diese Relationen numerisch instabil sind.

(Numerisch instabil wird so eine Relation genannt, für welche zu einer beliebigen Zahl $Q > 0$ ein Index N gegeben ist, sodass für sämtliche Zahlen $n > N$ die Ungleichung $|y_n - z_n| > Q$ gilt, wo y_n die genaue Lösung und z_n die errechnete Lösung ist – mit Zahlen endlicher Länge.)

Über den absoluten Fehler (weiter nur Fehler) der binomen Relation:

$$y_n = a_n + b_n y_{n-1} \quad \text{für } n = 1, 2, \dots$$

mit Anfangswert y_0 gibt der folgende Satz eine Aussage:

Satz. 1. *In der binomen Relation ist der absolute Fehler durch die folgende Beziehung gegeben:*

$$\Delta y_n = \sum_{k=1}^n \delta_{k-1} \prod_{i=k}^n b_i + \delta_n$$

für sämtliche natürliche n , wo δ_0 der Fehler des Ausgangswertes y_0 ist und δ_i , $i = 1, 2, \dots, n$ jene Fehler sind, welche in die Berechnung die arithmetische Operationen und die Koeffizienten im i -ten Schritt einführen (mit Rücksicht auf die endliche Anzahl der Dezimalstellen).

Δy_n ist die Lösung einer weiteren rekurrenten Relation:

$$\Delta y_n = \delta_n + b_n \Delta y_{n-1} \quad \text{für } n = 1, 2, \dots$$

wo $\Delta y_0 = \delta_0$ ist.

2. Es konvergiere die Folge $\{b_i\}_{i=1}^{\infty}$ und es gelte, dass deren Grenzwert b , $|b| < 1$ ist, dann gibt es zu einem beliebigen $\varepsilon > 0$ eine solche Zahl N_1 , dass für sämtliche natürliche $n > N_1$ die folgende Abschätzung für Δy_n (siehe 1.) gilt:

$$|\Delta y_n| < \frac{\delta}{1 - |b|} + \varepsilon_1$$

wo

$$\varepsilon_1 = \varepsilon M_n, \quad \delta = \max_{i > N_1} \{\delta_i\}$$

und

$$\lim_{n \rightarrow \infty} M_n = \left| \sum_{k=1}^{N_1} \delta_{k-1} \prod_{i=k}^{N_1} |b_i| \right| + \delta \frac{|b|}{1 - |b|}.$$

3. Die Koeffizientenfolge $\{b_i\}_{i=1}^{\infty}$ sei durch die Konstante $L < 1$ begrenzt, dann gilt für sämtliche Δy_n die folgende Abschätzung der Fehler:

$$|\Delta y_n| < \frac{\delta}{1 - q} + |b_n b_{n-1} \dots b_1| \delta_0 < \frac{\delta}{1 - q} + q^n \delta_0$$

wo $q = \max_{i=1(1)n} \{|b_i|\}$.

4. Ist die $\{b_i\}_{i=1}^{\infty}$ eine Nullfolge, dann gibt es zu einem beliebigen $\varepsilon > 0$ eine solche Zahl N_2 , dass für sämtliche natürliche $n > N_2$ diese Abschätzung für die Fehler Δy_n gilt:

$$|\Delta y_n| < |K| \varepsilon^{n-N_2} + \delta, \quad K = \sum_{k=1}^{N_2} \delta_{k-1} \prod_{i=k}^{N_2} |b_i|.$$

Beweis. 1. Der Beweis war mit Hilfe der mathematischen Induktion durchgeführt.

2. Aus dem Punkt 1. und aus den Voraussetzungen von 2. folgt, dass

$$\begin{aligned} |\Delta y_n| < & (|b| + \varepsilon)^{n-N} \sum_{k=1}^N \delta_{k-1} \prod_{i=k}^N |b_i| + \delta [(|b| + \varepsilon)^{n-N} + (|b| + \varepsilon)^{n-N-1} + \\ & + \dots + (|b| + \varepsilon) + 1], \end{aligned}$$

wo $\delta = \max_{i > N} \{\delta_i\}$ ist, gilt. Mit der Benützung des binomischen Satzes bekommt man das nächste Verhältnis:

$$|\Delta y_n| < |K| |b|^{n-N} + \delta \frac{|b|^{n-N+1}}{1-|b|} + \frac{\delta}{1-|b|} + \delta \sum_{k=1}^{n-N} \varepsilon^k \sum_{i=k}^{n-N} \binom{n-N-i+k}{i}$$

$$|b|^{n-N-i} + |K| \sum_{i=1}^{n-N} \binom{n-N}{i} |b|^{n-N-i} \varepsilon^i,$$

wo

$$K = \sum_{k=1}^N \delta_{k-1} \prod_{i=k}^N |b_i|$$

ist. Weiter gilt, dass wenn $|b|^{n-N} < \varepsilon$ für $n - N > [\log \varepsilon / \log |b|] + 1 = n_0$ ist (wo $[x]$ der ganze Teil von der Zahl x ist), dann gilt für $n > N + n_0 = N_1$ der Punkt 2.

Der Beweis der Abschätzungen 3. und 4. war mit Hilfe von 1. und 2. durchgeführt.

Folgerungen. 1. Gelten die Voraussetzungen 2., 3., oder 4., dann hängt für ein genügend grosses n , der Fehler Δy_n von dem Anfangswert nicht ab, und der kann daher beliebig gewählt werden.

2. Divergiert die Folge $\{b_i\}_{i=1}^{\infty}$, wird der Lösungsvorgang umgekehrt. Man erhält eine binome Relation:

$$y_{n-1} = \frac{1}{b_n} y_n - \frac{a_n}{b_n} \quad \text{für } n = n_0, n_0 - 1, \dots, n_1,$$

für welche Voraussetzungen 3. gelten. Da der Anfangswert unbekannt ist, wird dieser beliebig gewählt und zu jeder Lösung y_n auch $|\Delta y_n|$ ausgerechnet. Es muss aber wenigstens die grösste obere Abschätzung δ_{n_0} gegeben sein.

Dieser Satz hat eine besondere Anwendung für eine Integralgleichung Volterrschen Typs mit dem Kern der Form $K(x, y) = k(x) h(y)$:

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^x K(x, y) \varphi(y) dy = f(x).$$

Dieser entspricht der Differenzialgleichung:

$$\varphi'(x) - H(x) \varphi(x) = F(x).$$

Durch die Anwendung der Differenzenformel

$$\varphi'(x_{i+1}) = \frac{\varphi(x_{i+1}) - \varphi(x_i)}{h} + R$$

und nach Vernachlässigung des Restes R für die Lösung, ergibt sich die binome rekurrente Relation:

$$\begin{aligned}\varphi_{i+1} &= a_i + b_i \varphi_i, \\ a_i &= h \left(f'(x_i) - f(x_i) \frac{k'(x_i)}{k(x_i)} \right), \\ b_i &= 1 + h \left(\frac{k'(x_i)}{k(x_i)} + \lambda h(x_i) k(x_i) \right),\end{aligned}$$

wo $\varphi_i = \varphi(x_i)$ und $x_i = a + ih$. Man untersucht die Folge $\{b_i\} = \{b(x_i)\}$ nach 2., oder 3. und es wird bestimmt, welche Teile von vorn und welche von hinten berechnet werden müssen.

Beispiel 1. Man berechne das Integral

$$W_m = \int_0^1 x^m \cos 6\pi x \, dx$$

mittels der „per partes“ Methode. Es entsteht eine dreigliedrige rekurrente Relation:

$$W_m = \frac{m}{(6\pi)^2} - \frac{m(m-1)}{(6\pi)^2} W_{m-2}, \quad m = 2, 3, \dots$$

mit den Anfangswerten $W_0 = W_1 = 0$.

Es ist leicht festzustellen, dass die folgende Abschätzung gültig ist:

$$|W_m| \leq \frac{1}{m+1}.$$

Aus der Tabelle 1 sieht man, dass die Werte W_m für $m \geq M = 50$ bestimmt nicht die Lösung darstellen. Eine mehrfache Genauigkeit löst das Problem nicht, sondern verschiebt nur die Grenze M . Die Ergebnisse, die von hinten berechnet werden,

Tabelle 1

n	W_n (einf. Genauigkeit)	$1/(n+1)$	W_n (doppl. Genauigkeit)
10	2,30783203 10^{-2}	9,09090909 10^{-2}	2,30783201 10^{-2}
50	2,02937503 10^{-2}	1,96078431 10^{-2}	1,17351918 10^{-2}
72	-5,19893289 10^8	1,36986301 10^{-2}	1,80064969 10^{-2}
80	-3,81273902 10^{13}	1,23456790 10^{-2}	3,76560655 10^2
140	-2,17546472 10^{59}	7,09219858 10^{-3}	2,14850620 10^{48}

sind in der Tabelle 2. Die Anfangswerte werden illustrationshalber folgenderweise gewählt: $W_{200} = W_{199} = 100$, dann ist $\delta_{200} = \delta_{199} = 100$ und $\delta = 10^{-8}$; das ist die obere Abschätzung des Abrundungsfehlers für die dänische Rechenmaschine GIER. Die Genauigkeit ist ersichtlich.

Tabelle 2

n	W_n (von hinten)	$\frac{\delta}{(1-q)} + b_n b_{n-1} \dots b_1 \delta_0$	$1/(n+1)$
194	5,00584468 10^{-3}	7,56065704 10^{-5}	5,12820513 10^{-3}
190	5,18586150 10^{-3}	1,70482770 10^{-8}	5,23560209 10^{-3}
140	6,97017957 10^{-3}	1,01806663 10^{-8}	7,09219858 10^{-3}
80	1,17317909 10^{-2}	1,05651710 10^{-8}	1,2345679 10^{-2}
50	1,73519182 10^{-2}	1,15470311 10^{-8}	1,96078431 10^{-2}
20	2,71019628 10^{-2}	4,33013045 10^{-8}	4,76190476 10^{-2}

Beispiel 2. Die Integralgleichung

$$\varphi(x) - \int_0^x (e^y + y^2) \varphi(y) dy = \cos x \left(1 - \frac{e^x}{2} - 2x\right) + \sin x \left(2 - x^2 - \frac{e^x}{2}\right)$$

wird von hinten durch die folgende rekurrente Relation gelöst:

$$\begin{aligned} \varphi_i &= \frac{1}{b_i} \varphi_{i+1} - \frac{a_i}{b_i} \\ a_i &= h(-\sin x_i - \cos x_i(-x_i^2 - e^{x_i})), \\ b_i &= 1 + h(e^{x_i} + x_i^2), \\ h &= 0,001, \quad R \leq 0,0005. \end{aligned}$$

Der Anfang ist im Punkt $x_{n_0} = 10$ illustrationshalber etwas grösser gewählt. Zur Vergleichung sind in der Tabelle 3 die Differenzen zwischen der genauen Lösung und der Lösung mit dieser Methode berechnet. Diese Methode ist für die Programmierungszwecke passend.

Tabelle 3

x_i	6,000962	3,146956	1,571953	0,000952
$ \varphi(x_i) - \cos x_i $	0,0000011	0,0000147	0,0000065	0,0002399
$1/(1-q) + b_n \dots b_1 \delta_{n_0}$	0,3273613 10^{-7}	0,3114910 10^{-6}	0,1380794 10^{-5}	0,1000046 10^{-4}

$$\varphi(x_{n_0}) = \varphi(10) = 10, \quad \delta_{n_0} = 11$$

Súhrn

PODMIENKY STABILITY REKURENTNÝCH RELÁCIÍ A ICH APLIKÁCIA

KOHÚTOVÁ EVA

V článku je dokázaná veta o numerickej stabilite dvojčlenných rekurentných relácií a jej aplikácia na výpočet momentov a na riešenie integrálnych rovníc Volterrovho typu s jadrom, ktoré má tvar: $K(x, y) = k(x) h(y)$.

Anschrift des Verfassers: Eva Kohútová, prom. mat., Ústav technickej kybernetiky SAV, Dúbravská cesta 1, Bratislava.