Aplikace matematiky

Jozef Zámožík

Konstruktionen der linearen Perspektive mit der Anwendung des Trilinearsystemes

Aplikace matematiky, Vol. 15 (1970), No. 3, 213--220

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/103287`

SVAZEK 15 (1970) APLIKACE MATEMATIKY ČÍSLO 3

KONSTRUKTIONEN DER LINEAREN PERSPEKTIVE MIT DER ANWENDUNG DES TRILINEARSYSTEMES

JOZEF ZÁMOŽÍK

(Eingegangen am 9. Juni 1969)

In der Arbeit [1] wird die notwendige und hinreichende Bedingung für eine gewisse Konstruktion des Zentralrisses von der Mongesprojektion angeführt. Ausführlicher behandelt man, mit Rücksicht auf die Anwendungen, die gegenseitigen Transformationen der Parallel-und Zentralprojektion in den Literaturquellen [2], [3], [4]. Der Verfasser dieses Artikels führt allgemeinere Beziehungen an, die aus der praktischen Hinsicht vorteilhaft sind.

Gegeben seien drei Ebenen ${}^i\varrho$ und drei Punkte ${}^iS$ (${}^iS \notin {}^i\varrho$), $i = 1, 2, 3$. Das System mit drei Basisen (${}^i\varrho, {}^iS$) wird das T r i l i n e a r s y s t e m genannt.

Erwägen wir zwei Spezialfälle von diesem System.

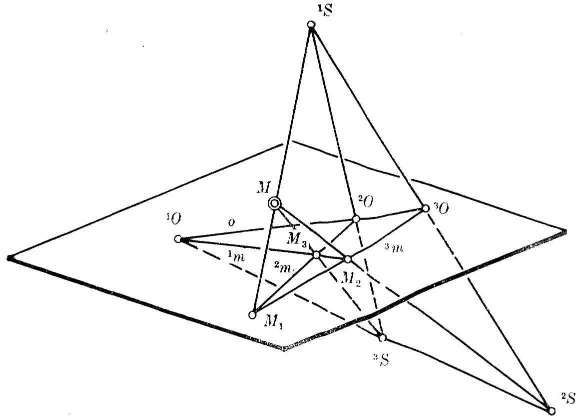

Abb. 1.

1. Gegeben sei eine Projektionsebene $\varrho(= {}^1\varrho = {}^2\varrho = {}^3\varrho)$ und drei nichtkollineare Projektionsmittelpunkte ${}^iS$. Die Geraden $[{}^iS\, {}^jS]$ schneiden die Projektionsebene in drei Kernpunkten ${}^kO$ $(i \neq j \neq k,\ i, j, k = 1, 2, 3)$ auf der Kerngeraden $o =$ $= [{}^1S\,{}^2S\,{}^3S] \cap \varrho$.

Sei M_i die Projektion eines beliebigen Punktes M $(\neq {}^iS)$ durch den Projektionsmittelpunkt ${}^iS$ in der Projektionsebene ϱ. Es gilt ${}^kO, M_i, M_j \in {}^km$, wenn ${}^km = {}^k\mu \cap \varrho$ ist, wobei ${}^k\mu = [M\,{}^iS\,{}^jS]$ (Abb. 1).

Daher ergibt sich die folgende Konstruktion:

K 1.1. Die Projektion M_i kann man mit der Hilfe von genau zwei Projektionen M_j und M_k und zwei Kernpunkte ${}^kO$ und ${}^jO$ konstruieren; also ist $M_i = {}^km \cap {}^jm$ (soeine Konstruktionart nennen wir die Schneidendemethode).

Bezeichnen wir mit $\mathfrak{M}_i$ die Projektion eines Gebildes $\mathfrak{M}$ vom Projektionsmittelpunkt ${}^iS$ in die Projektionsebene ϱ.

S 1.2. *Die Abbildung, welche die Projektion $\mathfrak{M}_i$ von den Gebilden $\mathfrak{M}_j$ und $\mathfrak{M}_k$ mittels der Schneidendemethode darstellt, ist eine lineare Abbildung (des Gebildes $\mathfrak{M}$ von dem Projektionsmittelpunkt ${}^iS$ in die Ebene ϱ).*

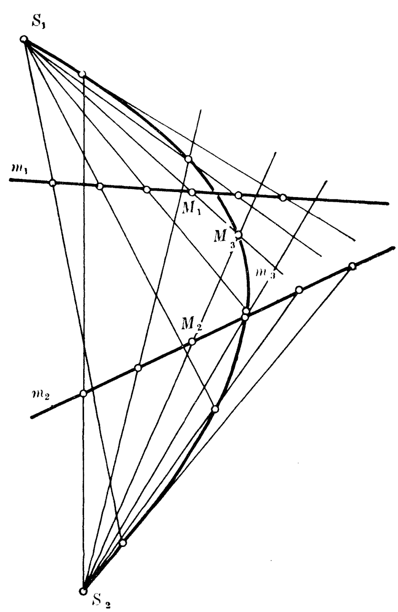

Abb. 2.

Offenbar sind die Geraden bei dieser Abbildung allgemein invariant. Es sind nämlich die Geradenbüschel ${}^kO({}^kl, {}^km, \ldots)$ und ${}^jO({}^jl, {}^jm, \ldots)$ perspektiv, nachdem ${}^ko = {}^jo = {}^io = o$. Wenn die Geraden a_j und a_k (in allgemeiner Lage) Projektionen einer Geraden a von den Projektionsmittelpunkten ${}^{j}S$ und ${}^{k}S$ sind, dann sind die Punktreihen auf den Geraden a_j und a_k projektiv. Die Geraden der Büschel mit den Mitten ${}^{k}O$ und ${}^{j}O$, welche durch die sich entsprechenden Punkte der Geraden a_j und a_k gehen, schneiden sich in einem Kegelschnitt, welcher in die Geraden o und a_i zerfällt. Insbesondere, wenn ${}^{i}S \in a$ ist, dann ist a_i — als ein Produkt der Projektionen a_j und a_k — ein Punkt, die Projektion aller Punkte der Geraden a mit der Ausnahme des Punktes ${}^{i}S$.

Die Eigenschaften von dem Satz S 1.2 können zu einer gewissen Erweiterung des Eckhartschen Satzes [5] über das Einschneideverfahren für die Zentralprojektion benützt werden.

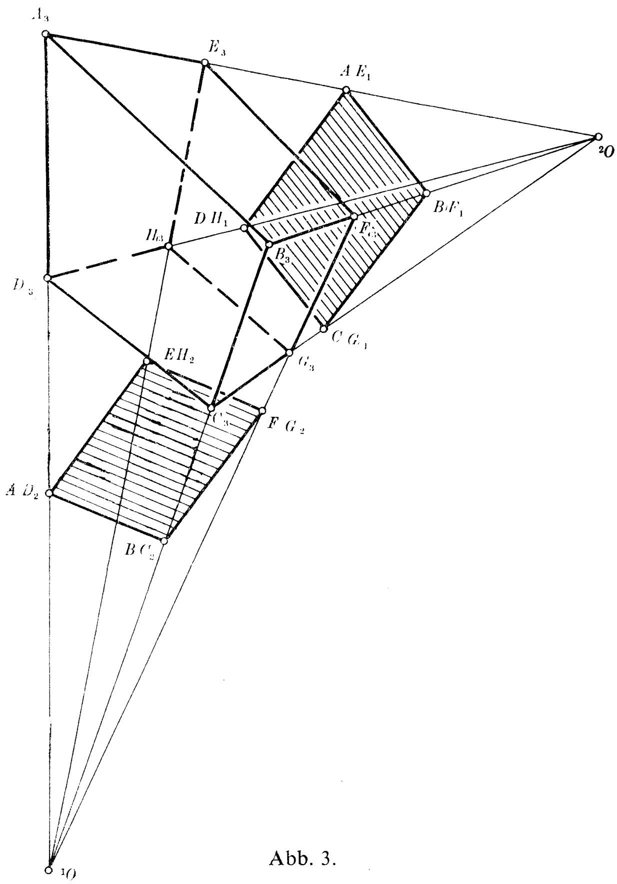

Abb. 3.

B e m e r k u n g. Eine Analogie des Einschneideverfahrens für die Zentralprojektion kann man allgemein nicht schaffen. Konstruiert man nämlich zu zwei Parallelprojektionen $\mathfrak{M}_1$ und $\mathfrak{M}_2$, die in der Ebene ϱ beliebig umgestellt sind, durch die

Mitten S_1 und S_2 $(\in \varrho)$ mit Hilfe der Schneidendemethode das Gebilde $\mathfrak{M}_3$, so muss diese Abbildung nicht linear sein (Abb. 2): Es seien die Geraden $m_1 \in \mathfrak{M}_1$ und $m_2 \in \in \mathfrak{M}_2$ parallele Projektionen der Geraden $m \in \mathfrak{M}$ in die Ebene ϱ, welche beliebig in dieser Ebene umgestellt sind. Die Punktreihen auf den Geraden m_1 und m_2 sind sich ähnlich. Dann kann der Fall vorkommen, dass die Schnittpunkte der Geraden der Büschel mit den Mitten in den Punkten S_1 und S_2, welche durch die einander entsprechenden Punkte der Geraden m_1 und m_2 gehen, sich in einem regulären Kegelschnitt schneiden (in einer Parabel).

Wir führen nun einen Satz über das speziale Einschneideverfahren an.

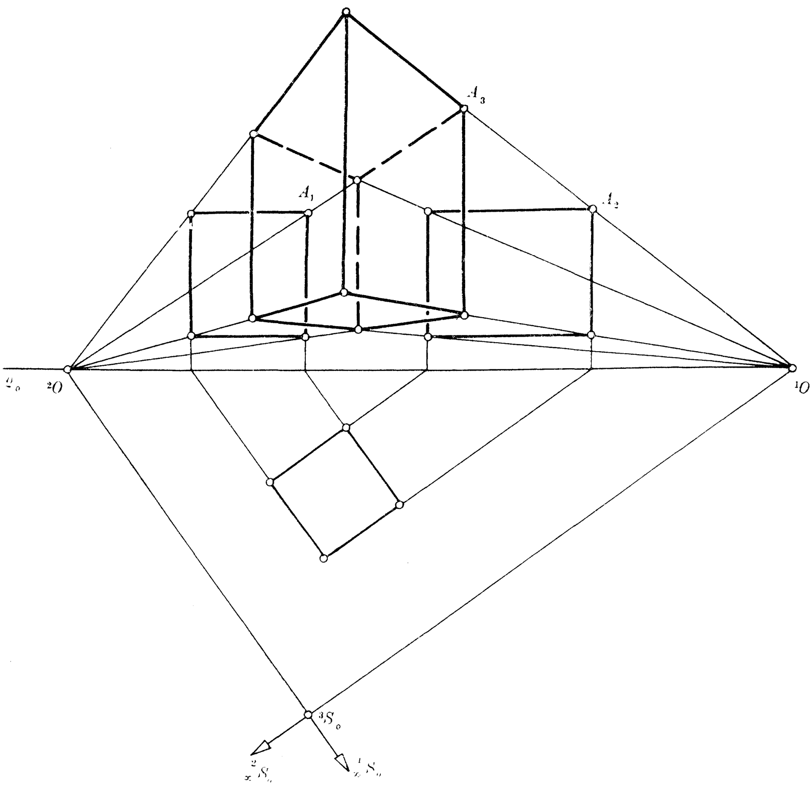

Abb. 4.

S 1.3. *Es seien zwei Parallelprojektionen $\mathfrak{M}_1$ und $\mathfrak{M}_2$ des Gebildes $\mathfrak{M}$ in die Ebene ϱ (durch verschiedene uneigentliche Punkte ${}^1_\infty S$ und ${}^2_\infty S$) gegeben. Sei weiter ein Punkt ${}^3S \notin \varrho$ gegeben. Das Gebilde $\mathfrak{M}_3$, welches mittels der Schneidendemethode der Geraden von den Büscheln mit den Mitten ${}^2O$ und ${}^1O$, welche durch die einander entsprechenden Punkte der Gebilde $\mathfrak{M}_1$ und $\mathfrak{M}_2$ gehen, (nennen wir diese Methode* *das speziale Einschneideverfahren) entsteht, ist die Projektion des Gebildes $\mathfrak{M}$ von dem Mittelpunkt ^3S in die Ebene ϱ.*

$\mathfrak{M}_3$ ist entweder eine Zentral- oder Parallelprojektion jenachdem ob der Punkt ^3S ein eigentlicher oder uneigentlicher Punkt ist.

Der Satz S 1.3 ist eine unmittelbare Folgerung des Satzes S 1.2 und wurde mit Berücksichtigung von praktischen Konstruktionen dargestellt. Die lineare Perspektive kann man z.B. von zwei Parallelprojektionen des Gebildes in dieselbe Ebene konstruieren (Abb. 3 und Abb. 4).

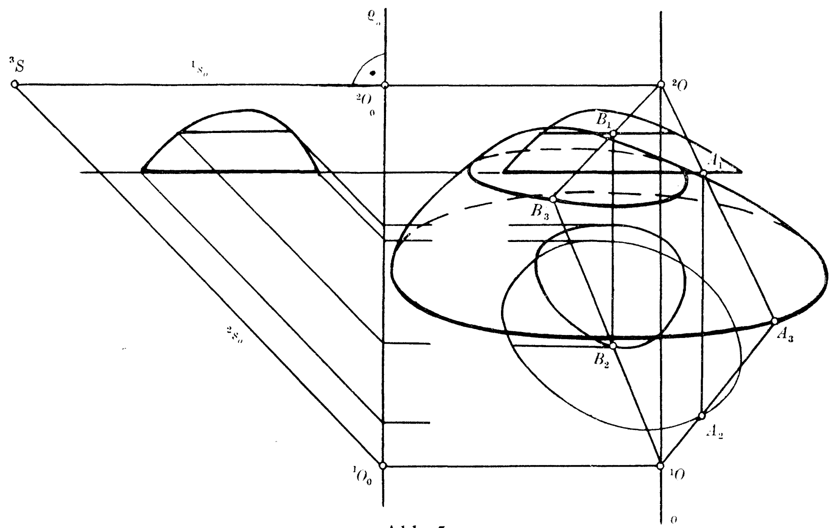

Abb. 5.

Als ein Beispiel wird in Abb. 5 eine lineare Perspektive der Hauptschichtenlinien einer topographischen Fläche Φ gegeben. Die Projektionsebene ϱ ist zu den (horizontalen) Ebenen der Hauptschichtenlinien senkrecht. Wählen wir die Richtungen ^1s und ^2s (oder die Punkte $^1_\infty S$ und $^2_\infty S$) sodass $^1s \perp \varrho$ ist und dass ^2s mit der Projektionsebene ϱ einen Winkel von 45° einschliesst (der Anschaulichkeit wegen ist in der Abb. 5 eine Hilfsprojektionsebene eingeführt und die in der enthaltenen Gebilde sind mit dem Index 0 versehen). Φ_1 ist dann der Normalriss und Φ_2 ist die Militärperspektive der Fläche Φ. Die Hauptschichtenlinien der Fläche Φ sind mit deren Projektionen in der Richtung ^2s kongruent. Dieses ermöglicht die einfache Konstruktion des Gebildes Φ_2 von dem gegebenen Schichtenplan, nachdem die Projektionen der Ebenen von zwei benachbarten Hauptschichtenlinien um eine equidistante Länge verschoben sind.

Wählt man weiter eine eigentliche Mitte ^3S der linearen Perspektive und konstruiert die zugehörigen Kernpunkte ^2O und ^1O, dann kann man mittels des spezialen

Einschneideverfahrens die Perspektive der Hauptschichtenlinien der Fläche Φ herstellen.

Bemerkung. Die Bilddistanz der Perspektive ist $d = \overline{{}^1O\,{}^2O}$.

2. Es sei eine Projektionsebene ϱ (s. Abs. 1) und kollineare, von einander verschiedene Punkte ${}^iS$ gegeben. Dann hat jedes Quadrupel von Punkten ${}^1S$, ${}^2S$, ${}^3S$, O, wo O ein Kernpunkt ist und jedes Quadrupel A_1, A_2, A_3, O, wo A_i die Projektion des Punktes $A \notin \varrho \cup [{}^iS\ O]$ durch den Mittelpunkt ${}^iS$, dasselbe Doppelverhältniss δ (Abb. 6).

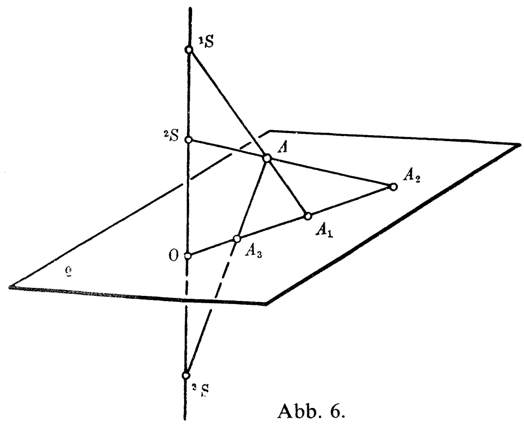

Abb. 6.

Daher folgt die Konstruktion der Projektion eines Gebildes von dessen gegebenen Projektionen in dieselbe Ebene:

K 2.1. In der Ebene ϱ wählen wir drei Punkte ${}^1R$, ${}^2R$, ${}^3R$ auf der Geraden, welche durch den Punkt O geht sodass $({}^1R\ {}^2R\ {}^3R\ O) = ({}^1S\ {}^2S\ {}^3S\ O)$ ist und konstruieren bekannterweise zu zwei gegebenen Projektionen die dritte.

Wenn das abgebildete Gebilde ein ebenes Gebilde ist, dann genügt es zu seiner Konstruktion eine andere Projektion und die Lage beider Mitten ${}^1S$ und ${}^2S$ zu kennen. Dann ist zwischen den Projektionen π_1 und π_2 der Ebene π, $({}^1S, {}^2S \notin \pi)$, allgemein die Beziehung der perspektiven Kollineation (oder Affinität), wobei die Spur p^π der Ebene π die Achse und der Kernpunkt $O = [{}^1S\ {}^2S] \cap \varrho$ die Mitte ist (Abb. 7). Zur Bestimmung dieser Kollineation ist es zweckgemäss beide Horizonte h_1 und h_2 zu wählen.

Die Punktkonstruktion, die daher folgt, kann auch für den Fall von unebenen Gebilden abgeändert werden, wenn die Normalrisse der Punkte des Gebildes in einer Ebene bekannt sind (dieses ist bei technischen Objekten üblich).

Wir legen ein Beispiel vor (Abb. 8).

Es seien die Elemente O, p^π, h_1, h_2 und der Fluchtpunkt U_1^k, der zu der Ebene π senkrechten Geraden gegeben. Sei weiter die Projektion A_1B_1 des zu der Ebene π senkrechten Abschnittes AB gegeben, wobei $A \in \pi$ sei. Es ist A_2B_2 zu konstruieren.

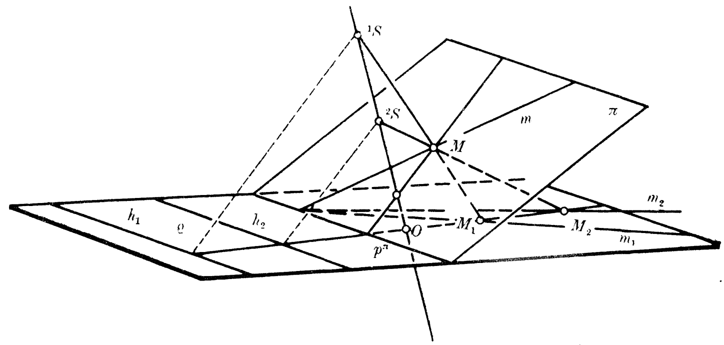

Abb. 7.

Konstruktion: Zuerst konstruieren wir U_2^k folgenderweise: Einem beliebigen $U_1 \in h_1$ entspricht $U_2 = [OU_1] \cap h_2$. Der Punkt U_2^k ist ein Schnittpunkt der Geraden $[OU_1^k]$ mit der Geraden, welche durch den Punkt U_2 parallel mit der Geraden $[U_1U_1^k]$ geht, nachdem $(O\,U_1\,U_2) = (O\,U_1^k\,U_2^k)$, wie es speziell von K 2.1 folgt, ist.

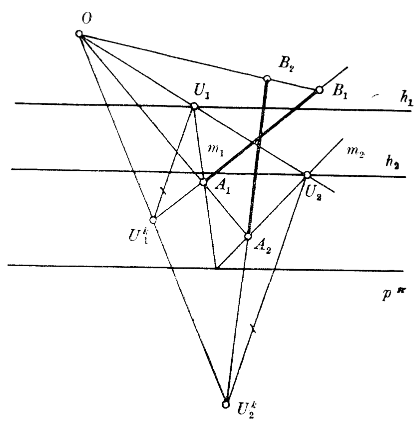

Abb. 8.

In der perspektiven Kollineation (O, p^π, h_1, h_2) konstruieren wir zu dem Punkt A_1 den Punkt A_2 (mittels eines geeigneten Paares m_1, m_2). Die Gerade $[A_2B_2]$ geht durch den Punkt U_2^k und den Punkt $B_2 = [A_2U_2^k] \cap [OB_1]$.

Diese Konstruktion hat viele Anwendungen, z.B. die Konstruktion einer Perspektive (oder Parallelaxonometrie) eines Gebildes von dessen Zentralprojektion oder Aufnahme, oder auch die Konstruktion eines Bildes, welches mit dem Gegebenen ein Paar von stereoskopischer Bilder gibt. Wenn eine graphische Fläche das Objekt der Abbildung ist, dann kann man wieder deren Militärperspektive benützen und die verlangten Projektionen der Hauptschichtenlinien mit Hilfe der Kollineation herstellen.

Literatur

[1] *J. Szabó:* Eine Verallgemeinerung des Eckhartschen Einschneideverfahrens. Publicationes Mathematicae, t. 14., Debrecen 1967, 311–319.

[2] *К. С. Кипшидзе:* Метод построения перспектив по аксонометрическим проекциям. Труды Грузинского политехнического института, №. 6, 1963, 33—47.

[3] *Н. В. Белов:* Взаимотрансформация перспективных изображений. Сб. научных трудов Ленинградского инженерно-строительного института, вып. 36, Ленинград 1962, 27—34.

[4] *Н. В. Белов:* Взаимотрансформация перспективных и аксонометрических проекций. Сборник см. [3], 35—46.

[5] *L. Eckhart:* Affinne Abbildung und Axonometrie. Sitzungsber. der Akad. Wien, Math. Nat. Kl. Abt. II, Wien 1937, 51–56.

Súhrn

KONŠTRUKCIE LINEÁRNEJ PERSPEKTÍVY S POUŽITÍM TRILINEÁRNEJ SÚSTAVY

JOZEF ZÁMOŽÍK

Veta S 1.3 o tzv. špeciálnej zárezovej metóde je dôsledkom vety S 1.2 a obsahuje isté rozšírenie Eckhartovej vety [5] o zárezovej metóde na centrálne premietanie.

Konštrukcie v odseku 2 vyplývajú z vlastnosti, že štvorica bodov ${}^1S$, ${}^2S$, ${}^3S$, O a každá štvorica A_1, A_2, A_3, O, kde O je uzlový bod a A_i priemet bodu $A \notin \varrho \cup \cup [{}^iS\ O]$ zo stredu ${}^iS$ do roviny ϱ, majú ten istý dvojpomer δ.

Anschrift des Verfassers: RNDr. *Jozef Zámožík* CSc., Stavebná fakulta SVŠT, katedra matematiky a deskriptívnej geometrie, Bratislava, Gottwaldovo nám. 2.