Aplikace matematiky

Andrej Kyselovič

Bemerkungen zu Gomorys Algorithmus

Aplikace matematiky, Vol. 16 (1971), No. 3, 164--167

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/103341`

BEMERKUNGEN ZU GOMORYS ALGORITHMUS

ANDREJ KYSELOVIČ

(Eingegangen am 22. April 1970)

Es sei die folgende Aufgabe der Linearprogrammierung gegeben: Bestimme man den Maximalwert der Linearform

$$z = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i \tag{1}$$

bei den Bedingungen

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_i \leqq b_j \,, \quad j = 1, 2, \ldots, m \,, \tag{2}$$

$$x_i \geqq 0 \,, \quad i = 1, 2, \ldots, n \,,$$

wobei c_i, a_{ij}, b_j reelle Zahlen sind.

Definition 1. *Der Vektor* $\mathbf{X} \equiv (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *ist genau dann eine ganzzahlige Lösung der Aufgabe der Linearprogrammierung, wenn*

1. *die Komponenten* x_i, $i = 1, \ldots, n$ *ganze Zahlen sind,*
2. *die Bedingungen* (2) *erfüllt sind,*
3. *für jeden anderen Vektor* $\mathbf{X}' \equiv (x'_1, x'_2, \ldots, x'_n)$, *welcher den Bedingungen* (2) *und dem Punkt* 1. *dieser Definition genügt, ist*

$$\sum_{i=1}^{n} c_i x'_i \leqq \sum_{i=1}^{n} c_i x_i \,.$$

Die Weise, auf welche man eine ganzzahlige Lösung der Aufgabe der Linearprogrammierung finden kann, bestimmte Gomory in [1] *und diese wird Gomorys' Algorithmus genannt.*

Definition 2. *Es seien* $d_1, \ldots, d_r$ *von einander verschiedene positive rationale Zahlen. Den Vektor* $\mathbf{X} \equiv (x_1, \ldots, x_n)$ *nennen wir ganzvielfache Lösung der Aufgabe der Linearprogrammierung zum Vektor* $(d_1, \ldots, d_n)$, *wenn*

1. *die Komponenten* x_i, $i = 1, \ldots, n$ *durch* d_j, $j = 1, \ldots, r$ *teilbar sind,*

2. *die Komponenten* x_i, $i = 1, \ldots, n$ *genügen den Bedingungen* (2),

3. *für jeden anderen Vektor* $\mathbf{X}' \equiv (x'_1, x'_2, \ldots, x'_n)$, *welcher den Bedingungen* (2) *und dem Punkt* 1. *von dieser Definition genügt, gilt*

$$\sum_{i=1}^{n} c_i x'_i \leqq \sum_{i=1}^{n} c_i x_i \,. \tag{3}$$

Bemerkung 1. Wenn $r = 1$ und $d_1 = 1$ ist, dann ist $\mathbf{X} \equiv (x_1, \ldots, x_n)$ eine ganzzahlige Lösung der Aufgabe.

Satz 1. *Es seien* $d_1, d_2, \ldots, d_r$ *von einander verschiedene positive ganze Zahlen und sei k deren kleinstes gemeinsames Vielfaches. Setze man in die Aufgabe der Linearprogrammierung* $x_i = ky_i$, $i = 1, \ldots, n$ *ein, d. h. die Linearform*

$$z = k \sum_{i=1}^{n} c_i y_i \tag{4}$$

soll unter den Bedingungen

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} y_i \leqq \frac{b_j}{k}\,, \quad j = 1, \ldots, m\,, \tag{5}$$

$$y_i \geqq 0\,, \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

ihr Maximum erreichen.

Dann gilt: Dazu, dass die Aufgabe der Linearprogrammierung (1), (2) *eine ganzvielfache Lösung zum Vektor* $d_1, \ldots, d_r$ *hat, ist notwendig und hinreichend, dass die Aufgabe der Linearprogrammierung* (4), (5) *eine ganzzahlige Lösung hat.*

Für die ganzvielfache Lösung gilt

$$x_i = ky_i\,, \quad i = 1, 2, \ldots, n\,. \tag{6}$$

Beweis. a) Die hinreichende Bedingung. Die Aufgabe (4), (5) besitze eine ganzzahlige Lösung. Es ist zu beweisen, dass durch diese Lösung eine ganzvielfache Lösung zum Vektor $d_1, \ldots, d_r$ bestimmt ist.

Sei $y_1, \ldots, y_n$ eine ganzzahlige Lösung von (4), (5). Dann ist $ky_1, \ldots, ky_n$ eine ganzvielfache Lösung, nachdem nach der Definition 2 folgendes gilt:

1. ky_i, $i = 1, \ldots, n$ ist durch $d_1, d_2, \ldots, d_r$ teilbar, nachdem k das kleinste gemeinsame Vielfache von $d_1, d_2, \ldots, d_r$ ist und y_i, $i = 1, \ldots, n$ sind nichtnegative ganze Zahlen.

2. Wenn die Beziehungen (5) durch k multipliziert werden, ergibt sich

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} k y_i \leqq b_j\,, \quad j = 1, \ldots, m\,, \quad ky_i \geqq 0\,, \quad i = 1, \ldots, n$$

d. h. die Lösung $ky_1, \ldots, ky_n$ genügt den Beziehungen (2).

3. Der Vektor $y_1, y_2, \ldots, y_n$ ist eine ganzzahlige Lösung von (4), (5) und darum ist die Linearform (4) in der Menge aller ganzen Lösungen der Ungleichung (5) maximal. Setzen wir voraus, dass in der Menge der ganzvielfachen Lösungen $ky_1, \ldots$ $\ldots, ky_n$ die Linearform (1) nicht maximalisiert, d. h. die ganzvielfache Lösung ist $x'_1, \ldots, x'_n$. Nach der Eigenschaft der ganzvielfachen Lösung gilt

$$\sum_{i=1}^{n} c_i x'_i > \sum_{i=1}^{n} c_i k y_i \,. \tag{7}$$

Ferner muss x'_i, $i = 1, \ldots, n$ durch $d_1, \ldots, d_r$ und also auch durch deren kleinstes gemeinsames Vielfaches k teilbar sein. Darum sind $x'_i/k = y'_i$, $i = 1, \ldots, n$ nichtnegative ganze Zahlen d. h. $x'_i = ky'_i$, $y'_i \geqq 0$, $i = 1, \ldots, n$ sind ganze nichtnegative Zahlen, welche den Bedingungen (5) genügen. Von der Beziehung (7) ergibt sich

$$\sum_{i=1}^{n} c_i k y_i < \sum_{i=1}^{n} c_i x'_i = k \sum_{i=1}^{n} c_i y'_i \,.$$

Dieses ist ein Widerspruch, nachdem $y_1, \ldots, y_n$ eine ganzzahlige Lösung der Aufgabe (4), (5) ist.

b) Die notwendige Bedingung. Die Aufgabe der Linearprogrammierung (1), (2) besitze eine ganzvielfache Lösung zum Vektor $d_1, \ldots, d_r$. Es wird gezeigt, dass die Aufgabe (4), (5) eine ganzzahlige Lösung nach der Beziehung (6) hat.

Sei $x_1, \ldots, x_n$ eine ganzvielfache Lösung der Aufgabe (1), (2). Die ganzzahlige Lösung von (4), (5) ist dann die Lösung $x_1/k, \ldots, x_n/k$, wobei k das kleinste gemeinsame Vielfache der positiven ganzen Zahlen $d_1, \ldots, d_r$ ist. Nach der Definition 1 ist:

1. $x_1/k, \ldots, x_n/k$ sind nichtnegative ganze Zahlen; wenn jedes x_i, $i = 1, \ldots, n$ durch $d_1, \ldots, d_r$, der Definition 2 nach, teilbar ist, dann ist es auch durch k teilbar.

2. Der Beweis ist offenbar, wenn man beide Beziehungen (2) mit dem kleinsten gemeinsamen Vielfachen k teilt.

3. Der Beweis ist – so wie bei der hinreichenden Bedingung – ersichtlich.

Satz 2. *Wenn in den Voraussetzungen des Satzes 1 k nicht das kleinste gemeinsame Vielfache von $d_1, \ldots, d_r$ ist, dann muss die Lösung (6) nicht eine Lösung der Aufgabe der Linearprogrammierung (1), (2) sein.*

Beweis. Die Lösung (6) erfüllt die Bedingungen (2). Beim Beweis der notwendigen Bedingung im Satz 1 müssen die Komponenten $x_1/k, \ldots, x_n/k$ nichtnegative ganze Zahlen sein; dieses muss bei gegebenem k nicht immer der Fall sein.

Satz 3. *Es seien $d_1, \ldots, d_r$ von einander verschiedene positive Rationalzahlen, $d_i = p_i/q_i$, $q_i > 0$, p_i, q_i ganz, $i = 1, \ldots, r$. Erweitere man diese Brüche so, dass deren Nenner q das kleinste gemeinsame Vielfache der Zahlen $q_1, \ldots, q_r$ ist. Bezeichne man dann $d_i = p'_i/q$, $i = 1, \ldots, r$. Es sei k das kleinste gemeinsame Vielfa-*

che der Zahlen $p'_1, \ldots, p'_r$. Für diese $d_1, \ldots, d_r$ und so gegebenes k gilt die Behauptung des Satzes 1.

Beweis. Der Beweis folgt vom vorgehenden Satz. Nach diesem und mit Rücksicht auf unsere Voraussetzungen gilt: Notwendig und hinreichend dazu, dass die Aufgabe (1), (2) eine zum Vektor $p'_1, \ldots, p'_r$ ganzvielfache Lösung x_i, $i = 1, \ldots, n$ hat ist, dass die Aufgabe (4), (5) eine ganzzahlige Lösung y_i hat, wobei $x_i = ky_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$ ist. Also wenn eine ganzvielfache Lösung der Aufgabe der Linearprogrammierung (1), (2) zum Vektor $(p'_1, \ldots, p'_r)$ existiert d. h. der Ausdruck x_i/p'_j, $i = 1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, r$ ist eine nichtnegative ganze Zahl, dann ist offenbar auch $x_i \cdot q/p'_j = x_i/d_j$, $i = 1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, r$ nichtnegativ und ganz. Nachdem weiter die Bedingungen 2. und 3. von der Definition 2 auch in Bezug zu d_i, $i = 1, \ldots, r$ erfüllt sind, ist $x_1, \ldots, x_n$ eine ganzvielfache Lösung zum Vektor $(d_1, \ldots, d_r)$.

Bemerkung 2. Das Bedürfnis der Bestimmung einer ganzvielfachen Lösung der Aufgabe der Linearprogrammierung ist bei der Lösung der folgenden Aufgabe entstanden: Gegeben seien Blechwickel mit den Gewichten $d_1, \ldots, d_r$ und der Breite a. Man soll von diesen Wickeln durch paralelle Schnitte Bände der Breite a_i mit dem Gesamtgewicht b_i, $i = 1, \ldots, n$ so schneiden, dass beim Schneiden der Abfall minimal ist und dass man beim Schneiden beliebige ganze Blechwickel mit vorgegebenen Gewichten $d_1, \ldots, d_r$ benützen kann.

Literatur

[1] *R. T. Gomory:* All-integer programming algorithm, Industrial Scheduling.

Súhrn

POZNÁMKA KE GOMORYHO ALGORITMU

ANDREJ KYSELOVIČ

Článok pojednáva o celonásobnom riešení úlohy lineárneho programovania za predpokladu, že existuje celočíselné riešenie odvodenej úlohy. Udáva nutnú i postačujúcu podmienku existencie celonásobného riešenia.

Anschrift des Verfassers RNDr: Andrej Kyselovič, Ul. Slobody 10, Košice.