Zbyněk Nádeník

Über Reduktion der sphärischen Dreiecke

Aplikace matematiky, Vol. 16 (1971), No. 3, 229--231

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/103349

ÜBER REDUKTION DER SPHÄRISCHEN DREIECKE

ZBYNĚK NÁDENÍK

(Eingegangen am 28. September 1970)

Es seien A, B, C die Ecken, $\alpha, \beta, \gamma < \pi$ die Winkel, $a, b, c < \pi$ die Seiten und $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$ die Sehnen eines sphärischen Dreiecks auf der Einheitskugel. Weiter sei Δ der Flächeninhalt des ebenen Dreiecks mit den Seiten a, b, c. Für den Exzess ε des sphärischen Dreiecks ABC ergibt sich nach den wohlbekannten Formeln von Heron und von L'Huilier die Beziehung

$$\varepsilon = \Delta\{1 + (2)\}\,, \tag{1}$$

wo (n) die Summanden bezeichnet, welche in a, b, c von mindestens n-ter Ordnung sind. Nach dem Kosinussatz und der Formel von Heron ist

$$\begin{aligned}\cos\gamma &= (\cos c - \cos a \cos b) : \sin a \sin b = \\ &= \{a^2 + b^2 - c^2 - \tfrac{4}{3}\Delta^2 + (6)\} : 2ab\,.\end{aligned} \tag{2}$$

Unter nochmaliger Zuhilfenahme der Formel von Heron ergibt sich daraus

$$\sin\gamma = 2\Delta\{1 + \tfrac{1}{12}(a^2 + b^2 - c^2) + (4)\} : ab\,. \tag{3}$$

Es sei t eine beliebige Zahl. Nach $(1)-(3)$ ist

$$\begin{aligned}\sin(\gamma - t\varepsilon) &= \sin\gamma\cos t\varepsilon - \cos\gamma\sin t\varepsilon = \sin\gamma - t\varepsilon\cos\gamma + (4) = \\ &= 2\Delta\{1 + (\tfrac{1}{12} - \tfrac{1}{4}t)(a^2 + b^2 - c^2) + (4)\} : ab\,,\end{aligned} \tag{4}$$

und folglich ergibt sich

$$\begin{aligned}\frac{\sin(\gamma - t\varepsilon)}{c\{1 + Nc^2 + (4)\}} &= \frac{2\Delta}{abc}\{1 + (\tfrac{1}{12} - \tfrac{1}{4}t)(a^2 + b^2) + \\ &+ (-N - \tfrac{1}{12} + \tfrac{1}{4}t)\,c^2 + (4)\}\,,\end{aligned} \tag{5}$$

wo N ein beliebiger Parameter ist.

Die rechte Seite in (5) ist gegenüber der zyklischen Vertauschung der Seiten a, b, c dann und nur dann invariant, wenn $t = \frac{1}{3} + 2N$. Dann ist nach (5) nämlich

$$\frac{\sin\{\gamma - (\frac{1}{3} + 2N)\,\varepsilon\}}{c\{1 + Nc^2 + (4)\}} = \frac{2\Delta}{abc}\{1 - \tfrac{1}{2}N(a^2 + b^2 + c^2) + (4)\}\,. \tag{6}$$

Für die Gleichheit bis auf (4), d. h. bis auf Glieder in a, b, c mindestens vierter Ordnung, benutzen wir das Zeichen $\doteq$. Dann ergibt sich aus (6) für $N = -\frac{1}{6}$ *der Sinussatz*

$$\sin\alpha : \sin\beta : \sin\gamma \doteq \sin a : \sin b : \sin c\,,$$

für $N = 0$ *der Satz von Legendre*

$$\sin(\alpha - \tfrac{1}{3}\varepsilon) : \sin(\beta - \tfrac{1}{3}\varepsilon) : \sin(\gamma - \tfrac{1}{3}\varepsilon) \doteq a : b : c$$

und für $N = -\frac{1}{24}$ *der Satz von Grunert*

$$\sin(\alpha - \tfrac{1}{4}\varepsilon) : \sin(\beta - \tfrac{1}{4}\varepsilon) : \sin(\gamma - \tfrac{1}{4}\varepsilon) \doteq \mathfrak{a} : \mathfrak{b} : \mathfrak{c}\,;$$

denn es ist freilich $\mathfrak{c} = 2\sin\frac{1}{2}c = c\{1 - \frac{1}{24}c^2 + (4)\}$.

Aber noch mehr. Zwischen den Sätzen von Legendre und von Grunert lässt sich sogar verschiedenartig ein Übergang realisieren.

Die Länge des Streckenzugs, welcher aus n gleichlangen Strecken besteht, welcher in A beginnt und in B endet und welcher alle Ecken auf der Seite $c = \widehat{AB}$ hat, ist

$$l_c = 2n\sin\frac{c}{2n} = c\left\{1 - \frac{c^2}{24n^2} + (4)\right\}.$$

Folglich ergibt sich aus (6) für $N = -1/24n^2$, dass das Verhältnis von $\sin\{\gamma - (\frac{1}{3} - 1/12n^2)\,\varepsilon\}$ und l_c gegenüber der zyklischen Vertauschung von a, b, c unverändert bleibt. Darin ist für $n = 1$ der Satz von Grunert und für $n \to \infty$ der Satz von Legendre enthalten.

Die Länge des Kreisbogens, welcher in der Ebene der Seite $c = \widehat{AB}$ die Punkte A, B verbindet und welcher den Radius r hat, ist $s_c = 2r\psi$, wo $\sin\psi = (1/r)\sin(c/2)$. Infolgedessen $s_c = c\{1 - \frac{1}{24}(1 - 1/r^2)\,c^2 + (4)\}$. Dementsprechend folgt aus (6) für $N = -\frac{1}{24}(1 - 1/r^2)$, dass der Quotient von $\sin\{\gamma - (\frac{1}{4} + 1/12r^2)\,\varepsilon\}$ und s_c gegenüber der zyklischen Vertauschung der Seiten a, b, c invariant ist. Daraus ergibt sich für $r = 1$ der Satz von Legendre und für $r \to \infty$ der Satz von Grunert.

Es gibt eine umfangreiche Literatur über den Legendreschen Satz, den A. M. Legendre schon 1787 ausgesprochen und 1798 zum erstenmal bewiesen hat. Die Geschichte des Theorems bis 1938 schildert eingehend F. Hauer [2]. Aus der Menge der Beweise ragt der Beweis von C. F. Gauss aus 1841 hervor. Fussend auf den Gedanken von A. M. Legendre hat B. Buzengeiger schon 1818 die Korrektionen zu den Dritteln des Exzesses im Legendreschen Theorem hergeleitet; man erhält schnell seine Formeln, indem man $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha + X$ setzt und X berechnet. Dieses Verfahren hat erst 1969 В. Н. Ганьшин [1] gekehrt; die Bestimmung von Y in $\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos \alpha^* + Y$, wo α^* der Winkel im ebenen Dreieck mit den Seiten a, b, c ist, bietet rascher auch die höheren Korrektionen.

J. A. Grunert hat seinen Satz 1855 bewiesen. Einschliesslich der Bedeutung für die geodätischen Rechnungen — aber ohne den nichtformalen Zusammenhang mit dem Theorem von Legendre — behandelt den Satz eingehend F. R. Helmert [3; 1. Teil, 2. Kap., § 23]. Ebenso isoliert leiten den Satz von Grunert auch М. С. Молоденский, В. Ф. Еремеев, М. И. Юркина [4; 1. Kap., § 7] her.

Literatur

[1] *В. Н. Ганьшин:* Обобшение теоремы Лежандра. Геодезия и Картография *14* (1969), 8—11.

[2] *F. Hauer:* Zur Geschichte des Satzes von Legendre. Zeitschrift für Vermessungswesen *67* (1938), 577—595, 641—653.

[3] *F. R. Helmert:* Die mathematischen und physikalischen Theorien der höheren Geodäsie. 1. Teil. Leipzig 1880, 1963. Russische Übersetzung Moskau 1962.

[4] *М. С. Молоденский — В. Ф. Еремеев — М. И. Юркина:* Методы изучения внешнего гравитационного поля и фигуры земли. Москва 1960. Englische Übersetzung Washington 1962.

Souhrn

O REDUKCI SFÉRICKÝCH TROJÚHELNÍKŮ

ZBYNĚK NÁDENÍK

Věty sinová, Legendrova a Grunertova jsou odvozeny jako speciální případy obecnějšího teorému.

Anschrift des Verfassers: Doc. Dr. *Zbyněk Nádeník,* DrSc., stavební fakulta ČVUT, Trojanova 13, Praha 2.