

Aplikace matematiky

Bruno Budinský; Zdeněk Novák

Die Ableitung einer Formel für die Polarabsteckung der Klothoide und die Fehlerveranschlagung

Aplikace matematiky, Vol. 16 (1971), No. 4, 289--296

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/103358>

Terms of use:

© Institute of Mathematics AS CR, 1971

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://project.dml.cz>

DIE ABLEITUNG EINER FORMEL FÜR DIE POLARABSTECKUNG DER KLOTHOIDE UND DIE FEHLERVERANSCHLAGUNG

BRUNO BUDINSKÝ und ZDENĚK NOVÁK

(Eingegangen am 12. Oktober 1970)

Es wird vorausgesetzt, dass eine Klothoide gegeben ist. Wählen wir positive Zahlen L, s und konstruieren wir die Punkte I, I', B, B' so, dass die angegebene Reihenfolge der Punkte (welche die so genannte positive Kurvenorientation bestimmen) auf der Kurve eingehalten wird. I ist der Wendepunkt der Kurve und für die Bogenlänge gelten folgende Beziehungen:

$$d(\widehat{II'}) = d(\widehat{BB'}) = s, \quad d(\widehat{IB}) = L.$$

Im Punkte I konstruieren wir die Tangente t und lass $t^+, t^+ \subset t$ ein Halbstrahl, der im Punkte I auf der Klothoide die positive Orientation induziert, sein. Im Punkte B konstruieren wir den Oskulationskreis der Klothoide und darauf tragen wir den Punkt B'' so aus, dass $d(\widehat{BB''}) = d(\widehat{BB'})$ und dass die geordneten Punktpaare (BB'') und (BB') im Punkte B auf beiden Kurven „zusammenfallende“ Orientation bestimm-

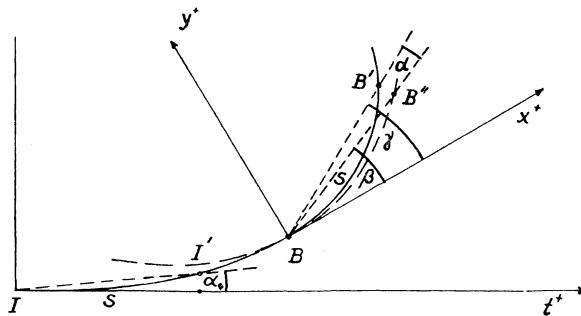


Abb. 1.

men (sich Abb. 1). Bezeichnen wir mit α bzw. α_0 die Grösse eines nicht orientierten Winkels der Halbstrahlen BB', BB'' bzw. II', t^+ . Was für eine Beziehung gibt es zwischen α_0 und α ?

E. Procházka hat Z. Nádeník darauf aufmerksam gemacht, dass diese Frage in der Literatur sehr oberflächlich diskutiert worden ist. Z. Nádeník hat dann auf Grund seiner früheren Aufsätze von der Klothoide (siehe [2], Seite 115 und 119) die Autoren zum Interesse für dieses Problem veranlasst.

Wir werden zeigen, dass $\alpha_0 \doteq \alpha$ und dann werden wir auch den Fehler $|\alpha_0 - \alpha|$ veranschlagen.

Setzen wir voraus, dass in der gegebenen Ebene die Klothoide mit der Vektorgleichung

$$(1) \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}(s), \quad s \in J,$$

beschrieben ist, wo der Parameter s ein Bogen ist. Lass $0 \in J$. Bezeichnen wir mit B den Punkt, der auf der Kurve dem Parameterwert $s = 0$ entspricht. Bezeichnen wir mit $\mathbf{t} = \mathbf{r}'$ den tangentialen Einheitsvektor der Kurve, mit \mathbf{n} den Einheitsvektor der Hauptnormale, der mit dem Vektor \mathbf{r}'' konformweise parallel ist, $\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}(0)$, $\mathbf{r}'_0 = \mathbf{r}'(0)$ usw.

Wenn wir das rechtwinklige kartesische Koordinatensystem so wählen, dass B der Ursprung des Systemes und die positive Richtung der Achse x bzw. y übereinstimmend parallel mit dem Vektor \mathbf{t}_0 bzw. \mathbf{n}_0 ist, dann können wir leicht mittels Frenet's Formeln (siehe [1], Seite 67) die folgenden so genannten kanonischen Gleichungen (1) ableiten:

$$(2) \quad \begin{aligned} x &= s - \frac{k_0^2}{6} s^3 - \frac{k'_0 k_0}{8} s^4 + \frac{k_0^4 - 3k_0'^2}{120} s^5 + \frac{k'_0 k_0^3}{72} s^6 + \\ &\quad + \frac{45k_0'^2 k_0^2 - k_0^6}{5040} s^7 + \frac{105k_0'^3 k_0 - 21k'_0 k_0^5}{40\,320} s^8 + (9), \\ y &= \frac{k_0}{2} s^2 + \frac{k'_0}{6} s^3 - \frac{k_0^3}{24} s^4 - \frac{k'_0 k_0^2}{20} s^5 + \frac{-15k_0'^2 k_0 + k_0^5}{720} s^6 + \\ &\quad + \frac{-k_0'^3 + k'_0 k_0^4}{336} s^7 + \frac{105k_0'^2 k_0^3 - k_0^7}{40\,320} s^8 + (9). \end{aligned}$$

Es sollte beizufügen werden, dass mit dem Symbol (9) die Summe der Glieder des neunten und höheren Grades bezeichnet wird.

Ist die betrachtete Linie unsere Klothoide mit dem Parameter A , dann $k(s) = (L + s) : A^2$ und man bekommt gleich aus der Beziehungen (2) kanonische Gleichungen der Klothoide

$$(3) \quad \begin{aligned} x &= s - \frac{L^2}{6A^4} s^3 - \frac{L}{8A^4} s^4 + \frac{L^4 - 3A^4}{120A^8} s^5 + \frac{L^3}{72A^8} s^6 + \\ &\quad + \frac{45L^2 A^4 - L^6}{5040A^{12}} s^7 + \frac{105A^4 L - 21L^5}{40\,320A^{12}} s^8 + (9), \end{aligned}$$

$$y = \frac{L}{2A^2} s^2 + \frac{1}{6A^2} s^3 - \frac{L^3}{24A^6} s^4 - \frac{L^2}{20A^6} s^5 + \frac{L^5 - 15LA^4}{720A^{10}} s^6 + \\ + \frac{L^4 - A^4}{336A^{10}} s^7 + \frac{105L^3A^4 - L^7}{40\,320A^{14}} s^8 + (9).$$

Sieh auch [6], Seite 22, Formeln (1,2) und (1,3). Lass uns denken, dass $s > 0$ wieder so gewählt wird, dass dem Parameterwert s der Punkt B' aus dem Bild 1 entspricht. Im Punkte B konstruieren wir die Tangente x zur Klothoide und soll x^+ , $x^+ \subset x$ ein Halbstrahl sein, der im Punkte B die positive Orientation der Klothoide bestimmt. Bezeichnen wir mit γ , bzw. β die Grösse des nicht orientierten Winkels von Halbstrahlen x^+ , BB' , bzw. x^+ , BB'' . Offensichtlich $\operatorname{tg} \gamma = y(s) : x(s)$. Daraus und aus der Gleichung (3) bekommt man nach einer schwierigeren Rechnung die Gleichung

$$(4) \quad \operatorname{tg} \gamma = \frac{L}{2A^2} s + \frac{1}{6A^2} s^2 + \frac{L^3}{24A^6} s^3 + \frac{29L^2}{720A^6} s^4 + \frac{L^5 + 3LA^4}{240A^{10}} s^5 + \\ + \frac{397L^4 + 72A^4}{60\,480A^{10}} s^6 + \frac{51L^7 + 482A^4L^3}{120\,960A^{14}} s^7 + (8).$$

Da auf dem Oskulationskreis der Klothoide $\beta = s/2r = Ls/2A^2$, gibt die Maclaurinreihe für die Funktion $\operatorname{tg} \beta$ dieses Ergebnis:

$$(5) \quad \operatorname{tg} \beta = \frac{L}{2A^2} s + \frac{L^3}{24A^6} s^3 + \frac{L^5}{240A^{10}} s^5 + \frac{17L^7}{40\,320A^{14}} s^7 + (9).$$

Weil $\alpha = \gamma - \beta$, ist $\operatorname{tg} \alpha = (\operatorname{tg} \gamma - \operatorname{tg} \beta) : (1 + \operatorname{tg} \gamma \operatorname{tg} \beta)$; setzt man hier aus (4) und (5) ein, dann bekommt man nach einer längeren, aber sonst nicht schwierigen Rechnung die Gleichung

$$(6) \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{6A^2} s^2 - \frac{L^2}{720A^6} s^4 + \frac{L}{720A^6} s^5 + \frac{36A^4 - L^4}{30\,240A^{10}} s^6 - \frac{L^3}{15\,120A^{10}} s^7 + (8).$$

Legen wir in (6) $L = 0$. Für α_0 bekommt man so den Ausdruck

$$(7) \quad \operatorname{tg} \alpha_0 = \frac{1}{6A^2} s^2 - \frac{1}{840A^6} s^6 + (8).$$

Mit der Vergleichung der Gleichungen (6) und (7) bekommt man die erste Antwort auf die von E. Procházka ausgesprochene Frage. Die Antwort kann auf folgende Weise formuliert werden.

Satz 1. Wenn die Tangenten der Funktionen $\alpha_0(s)$ und $\alpha(s)$ bei einem fest gewählten L mit Potenzreihen ausdrückt werden, dann kongruieren diese Reihen in den

ersten Gliedern bis zur dritten Potenz und beginnen im Glied mit der vierten Potenz verschieden zu sein.

Auf Grund dieses Satzes kann also vorausgesetzt werden, dass für "nicht grosse Zahlen L, s " $\alpha_0 \doteq \alpha$ gilt. Um dieses Ergebnis in der geodätischen Praxis geltend zu machen, muss man die Differenz $|\alpha - \alpha_0|$ anschlagen können. Wir werden uns jetzt dieses Frage widmen.

Schreiben wir die Gleichungen (3) in der folgenden Form um:

$$(8) \quad x = s + {}^xR_3, \quad y = \frac{L}{2A^2} s^2 + \frac{1}{6A^2} s^3 + {}^yR_4,$$

xR_3 und yR_4 sind Reste in zuständigen Maclaurinenentwicklungen. Wenn man die beiden letzten Gleichungen benützt und dabei weiter die Bezeichnungen

$$(9) \quad P = s, \quad Q = \frac{L}{2A^2} s^2 + \frac{1}{6A^2} s^3,$$

dann bekommt man $\operatorname{tg} \gamma = (Q + {}^yR_4)/(P + {}^xR_3)$, was auch in der Form

$$(10) \quad \operatorname{tg} \gamma = \frac{Q}{P} + M$$

geschrieben werden kann. Es kann leicht gerechnet werden, dass

$$(11) \quad M = \frac{P {}^yR_4 - Q {}^xR_3}{P(P + {}^xR_3)}.$$

Der Anschlag der Zahl M und die approximative Berechnung der Zahl γ ist die nächste Aufgabe dieses Artikels.

Lass es voraussetzen, dass die Zahlen ${}^xk, {}^xK, {}^yk, {}^yK$, so gegeben sind, dass folgendes gilt:

$$(12) \quad {}^xk < {}^xR_3 < {}^xK < 0, \quad {}^yk < {}^yR_4 < {}^yK < 0.$$

Aus (11) und (12) können leicht Ungleichungen abgeleitet werden

$$(13) \quad M < \frac{P {}^yK - Q {}^xk}{P(P - {}^xk)}, \quad \frac{P {}^yk - Q {}^xK}{P(P + {}^xK)} < M,$$

Die Ungleichungen sind für unser Verfahren von prinzipiellen Wichtigkeit.

In der Arbeit [5] sind unter Voraussetzungen

$$(14) \quad s > 0, \quad \frac{Ls + \frac{1}{2}s^2}{A^2} \leq 1,$$

$$\operatorname{tg} \frac{Ls + \frac{1}{2}s^2}{A^2} < \frac{3 - [(L-s)/A]^4}{6[(L-s)/A]^2}, \quad [(L+s)/A]^4 < 3,$$

(sich [5] Formeln (4,3), (5,5), (4,4), (4,6)) folgende Ungleichungen abgeleitet worden

$$(15) \quad -\frac{s^4(s+5L)}{40A^4} < {}^xR_4 < -\frac{Ls^4}{80A^4} < 0,$$

$$-\frac{s^4}{1680A^6}(70L^3 + 84L^2s + 35Ls^2 + 5s^3) < {}^yR_4 < \frac{L^3s^4}{24A^6} < 0$$

(sich [5] Formeln (5,18), (4,12), (5,19), (4,13)). Aus der Gleichung in (3) kann man leicht ableiten, dass

$$(16) \quad -\frac{L^2}{6A^4}s^3 + {}^xR_4 = {}^xR_3.$$

Wenn (15) mittels (16) zubereitet und wenn das Ergebnis mit dem Ungleichungssystem (12) vergleicht wird, dann kann festgestellt werden, dass die Zahlen xk , xK , yk , yK , die mit den Ausdrücken

$$(17) \quad {}^xk = -\frac{(5L+s)s^4}{40A^4} - \frac{L^2s^3}{6A^4}, \quad {}^xK = -\frac{Ls^4}{8A^4} - \frac{L^2s^3}{6A^4},$$

$${}^yk = -\frac{s^4}{1680A^6}(70L^3 + 84L^2s + 35Ls^2 + 5s^3), \quad {}^yK = -\frac{L^3s^4}{24A^6}$$

definiert sind, das Ungleichungssystem (12), soweit die Voraussetzungen (14) vollbracht sind, befriedigen. Setzt man (17) in die Ungleichungen (13) ein, können folgende zwei Ungleichungen ganz mechanisch abgeleitet werden:

$$(18) \quad M < \frac{30L^3s^3 + 65L^2s^4 + 24Ls^5 + 3s^6}{720A^6 - 6A^2(20L^2s^2 + 15Ls^3 + 3s^4)},$$

$$(19) \quad \frac{s^3(210L^3 + 203L^2s - 15s^3)}{210A^2(24A^4 - 4L^2s^2 - 3Ls^3)} < M.$$

Lass es voraussetzen, dass $0 < s \leq L$. Dann $s^6 \leq Ls^5 \leq L^2s^4 \leq L^3s^3$. Daraus und aus (18) wird abgeleitet

$$(20) \quad M < \frac{61L^3s^3}{360A^6 - 114A^2L^2s^2}.$$

Da die Funktion auf der linken Seite der Ungleichung (19) mit Rücksicht auf L wachsend ist (aus den Voraussetzungen (14) ergibt sich, dass der Nenner immer grösser als Null ist), kann einerseits mit der Einsetzung $L = 0$ in den Zähler, ander-

seits mit der Anwendung der Ungleichung $L^2s^2 > Ls^3$ in dem Nenner die Ungleichung

$$(21) \quad -\frac{15s^6}{5040A^6 - 7L^2s^2} < M$$

abgeleitet werden.

Aus den Gleichungen (10) und (9) ergibt sich, dass

$$(22) \quad \operatorname{tg} \gamma = \frac{L}{2A^2} s + \frac{1}{6A^2} s^2 + M.$$

Die vorhergehenden Betrachtungen werden im folgenden Satz zusammengefasst:

Satz 2. Wählen wir positive Zahlen $A, L, s, L > s$; konstruieren wir die Klothoide mit der natürlichen Gleichung $k = L/A^2$ und konstruieren wir weiter mit dem schon früher beschriebenen Verfahren die Punkte B, B' und im Punkte B die Tangente x und weiter noch den Halbstrahl x^+ (siehe Abb. 1). Dann gilt für die Grösse γ des nicht orientierten Winkels der Halbstrahlen BB', x^+ die Gleichung (22). Wenn auch weiterhin die Voraussetzungen (14) erfüllt sind, dann befriedigt die Zahl M aus der Gleichung (22) das Ungleichungssystem (18) und (19). Wenn noch $s \leq L$, genügt M der Ungleichung (20) und (21).

Es kann noch bemerkt werden, dass im Falle $0 < L < s$ die Zahl M auch so veranschlagt werden kann, dass in (20) und (21) s anstatt L geschrieben wird, das heisst:

$$-\frac{15s^6}{5040A^6 - 7s^4} < M < \frac{61s^6}{360A^6 - 114A^2s^4}.$$

Bezeichnen wir

$$(23) \quad \varepsilon = \operatorname{tg} \gamma - \gamma.$$

Offensichtlich $\varepsilon > 0$. Aus (23) und (22) ergibt sich, dass

$$(24) \quad \gamma = \frac{L}{2A^2} s + \frac{1}{6A^2} s^2 + M - \varepsilon.$$

Daraus und aus der Gleichung $\alpha = \gamma - \beta$ fliesst dann, dass

$$(25) \quad \alpha = \frac{1}{6A^2} s^2 + M - \varepsilon.$$

Um α mit einer hinreichenden Genauigkeit zu bestimmen, muss die Zahl ε veranschlagt werden. Aus der Gleichung (22) und der Ungleichung (21) ergibt sich, dass

$$(26) \quad \operatorname{tg} \gamma \in \left\langle 0, \frac{L}{2A^2} s + \frac{1}{6A^2} s^2 + \frac{61L^3s^3}{360A^6 - 114A^2L^2s^2} \right\rangle.$$

Bezeichnen wir

$$(27) \quad \bar{\gamma} = \operatorname{arctg} \left(\frac{L}{2A^2} s + \frac{1}{6A^2} s^2 + \frac{61L^3s^3}{360A^2 - 114A^2L^2s^2} \right)$$

und weiter

$$(28) \quad E = \operatorname{tg} \bar{\gamma} - \bar{\gamma}.$$

Es gilt offensichtlich $0 < \varepsilon < E$. Daraus, aus (20) und (21) fließt, dass

$$(29) \quad -\frac{15s^6}{5040A^6 - 7L^2s^2} - E < M - \varepsilon < -\frac{61L^3s^3}{360A^6 - 114A^2L^2s^2}.$$

Die vorhergehenden Ergebnisse werden im folgenden Satz zusammengefasst und dadurch wird die Antwort auf die früher formulierte Frage geschlossen:

Satz 3. *Mittels der Klothoide aus dem Satz 2 konstruieren wir mit dem schon früher beschriebenen Verfahren die Punkte B'' , I , I' , die Tangente t im Punkte I und den Halbstrahl t^+ . Dann gilt für die Grösse α des nicht orientierten Winkels der Halbstrahlen BB' , BB'' die Gleichung (25). Für die Grösse γ des nicht orientierten Winkels der Halbstrahlen BB' , x gilt die Gleichung (24). Wenn $0 < s \leq L$ und die Voraussetzungen (14) auch erfüllt sind, dann befriedigt die Zahl $M - \varepsilon$ aus (25) bzw. aus (24) das Ungleichungssystem (29), wo die Zahl E mittels (28) und (27) definiert wird. Ist α_0 die Grösse des nicht orientierten Winkels der Halbstrahlen II' , t^+ , dann gilt*

$$(30) \quad |\alpha - \alpha_0| < \frac{61L^3s^3}{360A^6 - 114A^2L^2s^2} + \frac{15s^6}{5040A^6 - 7L^2s^2} + E.$$

Bemerken wir wieder, dass im Falle $0 < L < s$, die Zahl $M - \varepsilon$ bzw. $|\alpha - \alpha_0|$ so veranschlagt werden kann, dass in (25), bzw. (24) für L die Zahl s eingesetzt wird.

Die theoretischen Betrachtungen werden jetzt mit einem praktischen Beispiel ergänzt. In der Praxis kann vorausgesetzt werden, dass die Zahlen A , s fest gewählt sind und $L \in [0, L_1]$, $s < L_1$. Die Zahlen α und γ werden aus ungefähren Ungleichungen gerechnet:

$$\alpha \doteq \frac{1}{6A^2} s^2, \quad \gamma \doteq \frac{L}{2A^2} s + \frac{1}{6A^2} s^2.$$

Wir überzeugen uns, ob die Voraussetzungen (14) für A , s und für jede $L \in [0, L_1]$ erfüllt sind. Bejahendenfalls kann man den Fehler, den wir bei der Feststellung der Zahlen α und γ begangen haben, mittels (29) veranschlagen. Nach einsetzung in (29) $L = L_1$ bekommt man den Anschlag geltend für jede $L \in [0, L_1]$.

Beispiel. Gewählte Werte: $A = 200$, $s = 20$, $L \in [0, 200]$. Nach (25) und (24) ist $\alpha = 0,00167 + M - \varepsilon$, $\gamma = 0,05167 + M - \varepsilon$. Wir überzeugen uns, ob die

Voraussetzungen (14) erfüllt sind. Die linke Seite der zweiten Ungleichung in (14) ist $0,15 \leq 1$. Die linke Seite der dritten Ungleichung ist $\operatorname{tg} 0,15 < 0,2$ und von der rechten Seite ist nicht schwer festzustellen, dass sie grösser als 0,2 ist. Zuletzt die linke Seite der vierten Ungleichung in (14) ist $(1,1)^4 < 3$. Jetzt kann man schon leicht berechnen, dass

$$\frac{61L^3s^3}{360A^6 - 114A^2L^2s^2} = 1,7 \cdot 10^{-4}, \quad \frac{15s^6}{5040A^6 - 7L^2s^2} = 3,0 \cdot 10^{-9}.$$

Mittels (27) stellten wir weiter fest, dass $\operatorname{tg} \gamma = 0,05184$. Daraus bekommen wir, am besten mit den Tafeln, $\gamma = 0,05180$ (im Bogenmass verstanden), und so gilt für E aus der Gleichung (28) $E = \operatorname{tg} \bar{\gamma} - \bar{\gamma}_4 = 4 \cdot 10^{-5}$. Daraus ergibt sich dann das Endergebnis $-4 \cdot 10^{-5} < M - \varepsilon < 1,7 \cdot 10^{-4}$, $|\alpha - \alpha_0| < 2,1 \cdot 10^{-4}$. Im Gradmass ist dann $|\alpha - \alpha_0|$ kleiner als $44''$.

Es ist leicht dieselben Anschläge für eine andere Situation auf der Klothoide zu berechnen. Aber das ist nicht mehr der Zweck dieses Artikels.

Literatur

- [1] *Budinský, Kepr*: Základy diferenciální geometrie s technickými aplikacemi, SNTL Praha, 1970.
- [2] *Kasper, Schürba, Lorenz*: Die Klothoide als Trasierungselement, 5. Aufl. Dümmlers Verlag, Bonn 1968.
- [3] *Krumphanzl, V.*: Inženýrská geodézie I, SNTL Praha, 1966.
- [4] *Nádeník, Z.*: Teorie rovinných křivek s aplikacemi v geodézii, Komunikační oblouky, ČSVTS, Praha 1961.
- [5] *Nádeník, Z.*: Odhad chyby u přibližných vzorců pro vytyčování bodů klotoidy pravouhlými souřadnicemi od její obecné tečny, Geodet. a kartograf. sborník, sv. 8, 1962.

Souhrn

ODVOZENÍ JEDNOHO VZORCE PRO POLÁRNÍ VYTYČOVÁNÍ KLOTOIDY

BRUNO BUDINSKÝ a ZDENĚK NOVÁK

V práci je pomocí nekonečných řad diskutován jeden méně známý přibližný vzorec vhodný pro polární vytyčování klotoidy.

Anschrift der Verfasser: Doc. Dr. *Bruno Budinský*, CSc., Ing. *Zdeněk Novák*, CSc., Stavební fakulta ČVUT, Husova 5, Praha 1.