

Aplikace matematiky

Josef Čermák

Algoritmy. 24. FOURIER. Fourierova analýza

Aplikace matematiky, Vol. 16 (1971), No. 6, 461--465

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/103383>

Terms of use:

© Institute of Mathematics AS CR, 1971

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://project.dml.cz>

ALGORITMY

24. FOURIER

FOURIEROVA ANALÝZA

JOSEF ČERMÁK, CSc., VŠChT Pardubice

procedure *FOURIER* (*n, t, y, period, p, l, s, vl, vs*) výsledek: (*c, g*);

value *n, l, period, vl, vs*;

integer *n, l, s, p*;

real *period, vl, vs, g*;

real array *t, y, c*;

begin comment Tato procedura hledá c_i v rozvoji

$$f(t) = c_1 + \sum_{i=1}^p (c_{2i} \cos i\omega t + c_{2i+1} \sin i\omega t) + \Theta(t)$$

kde $f(t)$ je dáno tabulkou $t_j, Y_{j,0}$ pro $j = 1, 2, \dots, n$ ($f(t_j) = Y_{j,0}$). Hodnoty t_j nemusí být ekvidistantní ani nemusí tvořit monotonní posloupnost. Musí však platit $n \geq 2p + 1$. Identifikátor *period* odpovídá periodě funkce $f(t)$. Po provedení procedury je:

$$Y_{j,1} = f(t_j) - \Theta(t_j)$$

$$Y_{j,2} = \Theta(t)$$

$$Y_{j,3} = c_2 \cos \omega t_j + c_4 \sin \omega t_j$$

$$Y_{j,4} = c_4 \cos 2\omega t_j + c_5 \sin 2\omega t_j$$

$$Y_{j,5} = c_6 \cos 3\omega t_j + c_7 \sin 3\omega t_j$$

atd.

a za g se dosadí součet $\sum_{i=1}^n [\Theta(t_i)]^2$.

Blok *GRAF* této procedury vynáší grafy těchto funkcí:

(1)	$f(t)$	jednotlivé body označuje písmenem	<i>O</i>
	$f(t) - \Theta(t)$	jednotlivé body označuje písmenem	<i>X</i>
	$\Theta(t)$	jednotlivé body označuje písmenem	<i>Z</i>
	$c_2 \cos 2\omega t + c_3 \sin \omega t$	jednotlivé body označuje písmenem	<i>A</i>
	$c_4 \cos 2\omega t + c_5 \sin 2\omega t$	jednotlivé body označuje písmenem	<i>B</i>
	$c_6 \cos 3\omega t + c_7 \sin 3\omega t$	jednotlivé body označuje písmenem	<i>C</i>

(kdyby se na témže místě grafu měla tisknout dvě nebo více písmen, pak se z nich tiskne to, jež je v (1) uvedeno nejnižší.) V tomto grafu je osa t umístěna svisle. l udává počet řádků, s počet sloupců, v nichž bude graf vynesena. Podle užitého typu tiskárny je nutno udát vzdálenost řádků vl a středovou vzdálenost sousedních znaků vs (obojí např. v mm);

```

integer  $n1, i, j, k, m$ ;
real  $s1, r, \omega, tt, yy$ ;
real array  $a[1 : 2 \times p + 1, 1 : 2 \times p + 1], b[1 : 2 \times p + 1]$ ;
 $n1 := 2 \times p + 1$ ;  $\omega := 6.28318531/period$ ;
for  $i := 1$  step 1 until  $n1$  do
  begin  $b[i] := 0$ ;
    for  $j := 1$  step 1 until  $n1$  do  $a[i, j] := 0$ 
  end  $i$ ;
 $a[1, 1] := n$ ;
for  $k := 1$  step 1 until  $n$  do
  begin  $s1 := 0$ ;  $tt := t[k]$ ;  $yy := y[k, 0]$ ;  $b[1] := b[1] + yy$ ;
    for  $j := 2$  step 2 until  $n1$  do
      begin  $s1 := s1 + \omega$ ;  $c[j] := \cos(tt \times s1)$ ;
         $a[1, j] := a[1, j] + c[j]$ ;  $c[j + 1] := \sin(tt \times s1)$ ;
         $a[1, j + 1] := a[1, j + 1] + c[j + 1]$ 
      end  $j$ ;
      for  $j := 2$  step 1 until  $n1$  do
        begin  $s1 := c[j]$ ;  $r := yy \times s1$ ;  $b[j] := b[j] + r$ ;
           $a[j, 1] := a[1, j]$ ;
          for  $i := 2$  step 1 until  $n1$  do  $a[j, i] := a[j, i] + c[i] \times s1$ 
        end  $i$ 
      end  $j$ ;
    end  $k$ ;
for  $k := 1$  step 1 until  $n1$  do
  begin  $r := 1/a[k, k]$ ;
    for  $j := k + 1$  step 1 until  $n1$  do  $a[k, j] := a[k, j] \times r$ ;
     $b[k] := b[k] \times r$ ;
    for  $j := k + 1$  step 1 until  $n1$  do
      for  $i := k + 1$  step 1 until  $n1$  do  $a[i, j] := a[i, j] - a[i, k] \times a[k, j]$ ;
      for  $i := k + 1$  step 1 until  $n1$  do  $b[i] := b[i] - a[i, k] \times b[k]$ 
    end  $i$ ;
  end  $j$ ;
end  $k$ ;

```

```

for  $i := n1$  step  $-1$  until  $1$  do
  begin  $s1 := 0$ ;
    for  $j := i + 1$  step  $1$  until  $n1$  do  $s1 := s1 + a[i, j] \times c[j]$ ;
     $c[i] := b[i] - s1$ 
  end zde je možno provést výstup koeficientů  $C_i$  pro  $i = 1, 2, \dots, 2p$ ;
 $g := 0$ ;
for  $k := 1$  step  $1$  until  $n$  do
  begin real  $cc, om$ ;  $tt := t[k]$ ;  $cc := c[1]$ ;  $om := 0$ ;
    for  $f := 1$  step  $1$  until  $p$  do
      begin
         $om := om + omega$ ;  $r := c[2 \times j] \times \cos(om \times tt) + c[2 \times j + 1] \times$ 
         $\times \sin(om \times tt)$ ;  $cc := cc + r$ ;  $y[k, j + 2] := r$ 
      end  $j$ ;
       $y[k, 1] := cc$ ;  $r := y[k, 0] - cc$ ;  $y[k, 2] := r$ ;  $g := g + r \times r$ 
    end  $k$ ;
comment zde je možno provést výstup součtu  $g$  druhých mocnin odchylek aproximované funkční hodnoty od dané;
GRAF:
begin integer array  $inlin [1 : l]$ ,  $sp[1 : s]$ ;
  real  $xmin, xmax, ymin, ymax, xmer, ymer$ ;
  comment dále následuje provedení grafu. Předpokládá se existence výstupní procedury  $line(k)$  pro  $k$  nových řádků a procedury  $text(A)$ , (kde  $A$  je řetěz) tisknoucí výstupním prostředkem řetěz  $A$ ;
 $m := p + 2$ ;
for  $i := 1$  step  $1$  until  $l$  do  $inlin [i] := 0$ ;
 $xmin := xmax := t[1]$ ;  $ymin := ymax := y[1, 1]$ ;
for  $i := 1$  step  $1$  until  $n$  do
  begin  $xmer := t[i]$ ;
    if  $xmin > xmer$  then  $xmin := xmer$ ;
    if  $xmax < xmer$  then  $xmax := xmer$ ;
    for  $j := 0$  step  $1$  until  $m$  do
      begin  $ymer := y[i, j]$ ;
        if  $ymin > ymer$  then  $ymin := ymer$ ;
        if  $ymax < ymer$  then  $ymax := ymer$ ;
      end  $j$ 
    end  $i$ ;

```

```

xmer := (l - 1)/(xmax - xmin); ymer := (s - 1)/(ymax - ymin);
for i := n step -1 until 1 do inlin[1 + (t[i] - xmin) × xmer] := i;
for i := 1 step 1 until l do

```

begin

```

switch sw := sw1, sw2, sw3, sw4, sw5, sw6, sw7;

```

comment je-li $p > 3$, třeba připojit ještě dalších $p - 3$ cílových výrazů, jimiž jsou návěští *sw*8, *sw*9, ... za příkaz *sw*7 a za ním následující **go to** *s*1 připojit ještě:

```

sw8: text ('e') go to s1

```

```

sw9: text ('f') go to s1

```

```

...

```

```

...

```

(jednotlivé instrukce ovšem nutno oddělit středníkem)

Procedury *text* v těchto instrukcích obstarávají tisk bodů funkci

$$c_8 \cos 4\omega t + c_9 \sin 4\omega t$$

$$c_{10} \cos 5\omega t + c_{11} \sin 5\omega t,$$

```

...

```

jež budou v grafu zobrazeny znaky *E*, *F*, ...;

```

if inlin [i] = 0 then go to newline;

```

```

for j := 1 step 1 until s do sp[j] := 1;

```

```

for j := 0 step 1 until m do

```

```

sp[1 + (y[inlin[i], j] - ymin) × ymer] := 2 + j; j := 1;

```

```

cykl : go to sw[sp[j]];

```

```

sw1 : text ('□'); go to s1;

```

```

sw2 : text ('0'); go to s1;

```

```

sw3 : text ('x'); go to s1;

```

```

sw4 : text ('z'); go to s1;

```

```

sw5 : text ('a'); go to s1;

```

```

sw6 : text ('b'); go to s1;

```

```

sw7 : text ('c'); go to s1;

```

```

s1 : j := j + 1; if j ≤ s then go to cykl;

```

```

newline: line (1)

```

end

zde je možné vytisknout:

ymin, jež udává polohu osy *T* grafu vzhledem k levému okraji papíru

xmin, jež udává polohu osy *Y* vzhledem k hornímu okraji grafu

$x_{mer} \times vl$ měřítko na ose T

$y_{mer} \times vs$ měřítko na ose Y

(měřítka jsou v těžce délkových jednotkách, v nichž byly udány vs a vl)

end

end proc FOURIER

Nechť je dána funkce $y = f(t)$ jednotlivými body (v počtu n). Pak hodnoty t uložíme do vektoru $t[1 : n]$, hodnoty y do nultého sloupce matice $y[1 : n, 0 : p + 2]$. Hodnota p udává maximální řád harmonické složky, který od programu žádáme. Uživatel procedury musí též udát velikost základní periody *period* signálu. Program určí koeficienty c_i harmonické řady

$$c[1] + \sum_{j=1}^p (c[2 \times i] \times \cos i\omega t + c[2 \times i + 1] \times \sin i\omega t).$$

Proto je třeba v hlavním programu deklarovat pro c pole $[1 : 2 \times p + 1]$.

Hodnota g po projití procedury obsahuje součet druhých mocnin zbytku.

Programu lze použít též k aproximaci periodické funkce $y = f(t)$ trigonometrickými polynomy řádu p . Určíme n hodnot y_i příslušných zvoleným hodnotám t_i a programem pak určíme $2p + 1$ koeficientů trigonometrického polynomu.

Program provádí dálnopisem, případně tiskárnou i grafické znázornění výsledků. Hodnotám t_i je úměrný počet řádků, souřadnicím y pak počet mezer (případně jiných symbolů).

Kontrolní příklad:

Tabelováním funkce

$$y = \sin \frac{100\pi}{18}(t - 0,03) + \sin \frac{100\pi}{18}(2t - 0,06) + \sin \frac{100\pi}{18}(3t - 0,09)$$

pro hodnoty $t = 0, 0,03, 0,06 \dots 0,36$ dostáváme následující tabulku:

$t_1 = 0,00$	$y_{1,0} = -2,36603$	$t_7 = 0,18$	$y_{7,0} = 0,63397$
$t_2 = 0,03$	$y_{2,0} = 0$	$t_8 = 0,21$	$y_{8,0} = 0$
$t_3 = 0,06$	$y_{3,0} = 2,36603$	$t_9 = 0,24$	$y_{9,0} = -0,63397$
$t_4 = 0,09$	$y_{4,0} = 1,73206$	$t_{10} = 0,27$	$y_{10,0} = 0$
$t_5 = 0,12$	$y_{5,0} = 0$	$t_{11} = 0,30$	$y_{11,0} = 0$
$t_6 = 0,15$	$y_{6,0} = 0$	$t_{12} = 0,33$	$y_{12,0} = -1,73206$
		$t_{13} = 0,36$	$y_{13,0} = -2,36603$

Volíme-li tyto hodnoty jako vstupní a položíme-li hodnotu *period* = 0,36 pak aplikací algoritmu dostáváme následující hodnoty

$$c_1 = 0, \quad c_2 = -0,500, \quad c_3 = 0,866, \quad c_4 = -0,866, \\ c_5 = 0,500, \quad c_6 = -1, \quad c_7 = 0.$$