Dominik Szynal; Jan Szynal

À propos de l'inversion des matrices généralisées de Jacobi.

Aplikace matematiky, Vol. 17 (1972), No. 1, 28--32

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/103389

A PROPOS DE L'INVERSION DES MATRICES GÉNÉRALISÉES DE JACOBI

DOMINIK SZYNAL et JAN SZYNAL

(Reçu le 7 septembre 1970)

Dans [2] ont été données les conditions suffisantes pour l'inversion d'une matrice de Jacobi, c'est-à-dire de la matrice

$$\mathbf{J} = [a_{ik}]_{\substack{i=1,2,\ldots, \\ k=1,2,\ldots,}} \quad \text{où} \quad a_{ik} = 0 \quad \text{pour} \quad |k-i| > 1\,.$$

La théorème de [2] fournissant la formule de la matrice inverse pour la matrice $\mathbf{J}$ permet de calculer les matrices inverses seulement dans le cas où tous les mineurs principaux de la matrice de Jacobi sont différents de zéro.

Dans la présente note nous proposons un procédé pour l'inversion d'une matrice de Jacobi qui peut ne pas satisfaire à l'hypothèse de ci-dessus. De plus, nous observons qu'en se servant de ce procédé, on peut trouver les inverses des matrices d'une forme plus générale, c'est-à-dire des matrices

$$\mathbf{J}_0 = [a_{ik}]_{\substack{i=1,2,\ldots, \\ k=1,2,\ldots,}} \quad \text{où} \quad a_{ik} = 0 \quad \text{pour} \quad |k-i| > n\,;$$

n est un nombre naturel arbitrairement fixé. La méthode de la racine carrée et celle des facteurs proportionnels [1] rendront de grands services dans ces considérations.

Considérons d'abord la matrice triangulaire supérieure

$$\text{(1)} \qquad \mathbf{R} = [r_{ik}]_{\substack{i=1,2,\ldots, \\ k=1,2,\ldots,}} \quad \text{où} \quad r_{ik} = 0 \quad \text{pour} \quad k < i \quad \text{et} \quad k > i + n\,.$$

On peut démontrer

Théorème 1. *Si $r_{ii} \neq 0$, $i = 1, 2, \ldots$, alors la matrice $\mathbf{R}$ admet une matrice inverse et dans ce cas $\mathbf{R}^{-1}$ (triangulaire supérieure) est de la forme*

(2) $$R^{-1} = X = [x_{ik}]_{\substack{i=1,2,\dots,\\ k=1,2,\dots,}} \quad \text{où}$$

$$x_{ik} = \begin{cases} 0 \quad \text{pour} \quad k < i \\ \dfrac{1}{r_{ii}} \quad \text{pour} \quad k = i \\ \dfrac{(-1)^{i+k}\,\Delta_{ki}}{\prod\limits_{p=i}^{k} r_{pp}} \quad \text{pour} \quad k > i\,, \quad \text{où} \quad \Delta_{ik} = (\det r_{mn})_{\substack{m=i,\dots,k-1\\ n=i+1,\dots,k}}\,. \end{cases}$$

Démonstration. Il faut démontrer que $RX = XR = I$, où I est und matrice unitaire. Soit $RX = E$. En calculant les éléments de la matrice E pour $k < i$, $k = i$ et $k > i$, nous obtenons:

1°. Pour $k < i$ on a:

$$e_{ik} = \sum_{l=1}^{\infty} r_{il}x_{lk} = \sum_{l=1}^{k} r_{il}x_{lk} + \sum_{l=k+1}^{\infty} r_{il}x_{lk} = 0\,,$$

car $\sum\limits_{l=1}^{k} r_{il}x_{lk} = 0$, wu que $r_{il} = 0$ pour $k \leqq l < i$, et $\sum\limits_{l=k+1}^{\infty} r_{il}x_{lk} = 0$ car $x_{ik} = 0$ pour $l > k$.

2°. Pour $k = i$ on a:

$$e_{ii} = \sum_{l=1}^{\infty} r_{il}x_{li} = \sum_{l=1}^{i-1} r_{il}x_{li} + r_{ii}x_{ii} + \sum_{l=i+i}^{\infty} r_{il}x_{li} = 1\,,$$

car $\sum\limits_{l=1}^{i-1} r_{il}x_{li} = 0$, vu que $r_{il} = 0$ pou1 $i > l$, $x_{ii} = 1/r_{ii}$, et $\sum\limits_{l=i+1}^{\infty} r_{il}x_{li} = 0$, car $x_{li} = 0$ pour $l > i$.

3°. Pour $k > i$ nous observons d'abord que

(3) $$\begin{aligned} \Delta_{ki} = {} & r_{i,i+1}\,\Delta_{k,i+1} + (-1)\,r_{i+1,i+1}r_{i,i+2}\,\Delta_{k,i+2} + \\ & + (-1)^2\,r_{i+2,i+2}r_{i+1,i+1}r_{i,i+3}\,\Delta_{k,i+3} + \dots + \\ & + (-1)^{k-i-2}\,r_{k-2,k-2}r_{k-3,k-3}\cdots r_{i+1,i+1}r_{k-1,i}\,\Delta_{k,k-1} + \\ & + (-1)^{k-i-1}\,r_{k-1,k-1}r_{k-2,k-2}\cdots r_{i+2,i+2}r_{i+1,i+1}r_{ki}\,. \end{aligned}$$

A partir de (3) on tiouve

(4) $$r_{ii}x_{ik} = -r_{i,i+1}x_{i+1,k} - r_{i,i+2}x_{i+2,k} - \dots - r_{k-1,i}x_{k-i,k} - r_{ki}x_{kk}\,.$$

D'où

$$e_{ik} = \sum_{l=1}^{\infty} r_{il}x_{ik} = \sum_{l=1}^{i-1} r_{il}x_{ik} + \sum_{l=i}^{k} r_{il}x_{lk} + \sum_{l=k+1}^{\infty} r_{il}x_{lk} = 0\,,$$

car $\sum_{l=1}^{i-1} r_{il}x_{lk} = 0$ vu que $r_{il} = 0$ pour $i > l$, $\sum_{l=i}^{k} r_{il}x_{lk} = 0$ par (4), et $\sum_{l=k+1}^{\infty} r_{il}x_{lk} = 0$ car $x_{lk} = 0$ pour $l > k$.

Donc, on a bien $\boldsymbol{RX} = \boldsymbol{I}$. De la même façon on démontre que $\boldsymbol{XR} = \boldsymbol{I}$.

Maintenant nous pouvons démontrer

Théorème 2. *Si une ligne quelconque de la matrice $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{J}_0$ est linéairement indépendante par rapport à 2n des lignes voisines supérieures et inférieures, et si la série $\sum_{l=1}^{\infty} x_{il}x_{lk}$ est convergente absolument pour tout i, k = 1, 2, ..., où x_{ik} est tiré de la formule (2) et $\boldsymbol{R}$ est un facteur obtenu par la décomposition de $\boldsymbol{AA}^T$ à l'aide de la méthode de la racine carrée de Banachiewicz ($\boldsymbol{AA}^T = \boldsymbol{R}^T\boldsymbol{R}$) alors pour la matrice $\boldsymbol{A}$ il existe une matrice $\boldsymbol{A}^{-1}$ fournie par la formule*

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{A}^T(\boldsymbol{R}^{-1}(\boldsymbol{R}^{-1})^T)\,. \tag{5}$$

Démonstration. Pour ine matiice $\boldsymbol{A}$ admettant une matrice inverse l'égalité $\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{A}^T(\boldsymbol{AA}^T)^{-1}$ est évidente. Comme $\boldsymbol{AA}^T$ est une matrice symétrique dont le mineur principal de dimensions $(4n + 1) \times (4n + 1)$ est différent de zéio (en vertu de l'indépendance de $2n$ des lignes voisines de cette partie de la matiice $\boldsymbol{A}$), nous pouvons y appliquer la décomposition de cette partie de la matrice $\boldsymbol{AA}^T$, par la méthode de la racine carrée de Banachiewicz [1], en deux matrices triangulaires. En continuant cette décomposition, ce qui est possible en raison de la symétrie de $\boldsymbol{AA}^T$ et du fait que les mineurs principaux sont différents de zéro (les lignes $\boldsymbol{A}$ sont linéairement indépendantes), nous obtenons la décomposition voulue. Mais $(\boldsymbol{AA}^T)^{-1} = \boldsymbol{R}^{-1}(\boldsymbol{R}^{-1})^T$, donc on a (5).

Si l'on applique à la décomposition de $\boldsymbol{AA}^T$ en matrices triangulaires la méthode de facteurs proportionnels [1], on a $\boldsymbol{AA}^T = \boldsymbol{GH}$, où

$$\boldsymbol{G} = [g_{ik}]_{\substack{i=1,2,\dots,\\ k=1,2,\dots,}} \quad \text{où} \quad g_{ik} = 0 \quad \text{pour} \quad k > i \quad \text{et} \quad i > k + n$$

$$\boldsymbol{H} = [h_{ik}]_{\substack{i=1,2,\dots,\\ k=1,2,\dots,}} \quad \text{où} \quad h_{ik} = 0 \quad \text{pour} \quad k < i \quad \text{et} \quad k > i + n\,.$$

Théorème 2'. *Si une ligne quenconque de la matrice $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{J}_0$ est linéairement indépendante des 2n lignes voisines supérieures et inférieures, et si la série $\sum_{l=1}^{\infty} \bar{g}_{il}\bar{h}_{lk}$, où $\bar{g}_{il}$ et $\bar{h}_{ik}$ sont des éléments de $\boldsymbol{G}^{-1}$ et $\boldsymbol{H}^{-1}$ respectivement, est convergente absolument pout tout i, k = 1, 2, ..., alors la matrice $\boldsymbol{A}$ admet une matrice inverse $\boldsymbol{A}^{-1}$ et $\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{A}^T(\boldsymbol{H}^{-1}\boldsymbol{G}^{-1})$.*

Les théorèmes 2 et 2' constituent donc une renforcement du résultat de [2].

Exemple. Trouvons la matrice inverse de la matrice

$$
\boldsymbol{A} = \left[\begin{array}{ccccccccccccccccc}
0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&\cdots\\
0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&\cdots\\
1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&\cdots\\
0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&\cdots\\
0&0&0&1&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&\cdots\\
0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&\cdots\\
0&0&0&0&0&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&\cdots\\
0&0&0&0&0&1&0&1&0&0&0&0&0&0&0&\cdots\\
0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&1&0&0&0&0&\cdots\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&0&0&0&0&\cdots\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&\cdots\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&1&0&\cdots\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&0&\cdots\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&\cdots\\
\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdots\\
\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdots\\
\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdots
\end{array}\right]
$$

La méthode de la racine carrée ou celle des facteurs proportionnels donnent

$$
\boldsymbol{A}^{-1} = \left[\begin{array}{cccccccccccccccccc}
0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&\cdots\\
0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&\cdots\\
1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&\cdots\\
0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&\cdots\\
0&0&0&-1&1&-1&0&&0&0&0&0&0&0&0&0&0&\cdots\\
0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&\cdots\\
0&&0&0&0&-1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&\cdots\\
0&0&0&0&0&-1&0&1&-1&0&0&0&0&0&0&0&0&\cdots\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&\cdots\\
0&0&0&0&0&0&0&0&1&-1&0&0&0&0&0&0&0&\cdots\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&&0&0&\cdots\\
0&0&0&0&0&&0&0&0&0&0&-1&0&0&0&0&0&\cdots\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&\cdots\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&-1&0&0&0&0&\cdots\\
0&0&0&0&0&0&&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&\cdots\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&-1&0&0&\cdots\\
\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdots\\
\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdots\\
\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdots
\end{array}\right].
$$

Ouvrages cités

[1] *T. Banachiewicz:* Rachunek krakowianowy, PWN, Warszawa 1959.
[2] *В. Г. Тарнопольский:* О матрицах Якоби, Изд. Выс. Учебных Завед. 2, 9, (1959), 233—243.

Souhrn

O INVERSI ZOBECNĚNÝCH JACOBIOVÝCH MATIC

DOMINIK SZYNAL et JAN SZYNAL

Je udána metoda výpočtu inversní k nekonečné zobecněné Jacobiově matici, tj. matici tvaru

$$J_0 = [a_{ik}]_{\substack{i=1,2,\dots,\\ k=1,2,\dots,}} \quad a_{ik} = 0 \quad \text{pro} \quad |k-i| > n\,,$$

kde n je pevné přirozené číslo. Při odvozování této metody, jež zobecňuje a prohlubuje výsledky Tarnopolského [2], hrají podstatnou úlohu Banachiewiczova metoda odmocniny a metoda proporcionálních faktorů.

Adresses des auteurs: Dr. *Dominik Szynal*, Chaire de Statistique Mathématique, Université M. Curie-Skłodowska, Lublin, ul. Nowotki 8, Pologne; Mgr. *Jan Szynal*, Chaire de Fonctions Analytiques, Université M. Curie-Skłodowska, Lublin, ul. Nowotki 8, Pologne.