Dominik Szynal; Jan Szynal

Note sur le rang d'une matrice

Aplikace matematiky, Vol. 17 (1972), No. 1, 33--38

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/103390

NOTE SUR LE RANG D'UNE MATRICE

DOMINIK SZYNAL et JAN SZYNAL

(Reçu le 7 septembre 1970)

La détermination du rang d'une matrice et, ce qui en est strictement solidaire, la compatibilité d'un système d'équations linéaires constituent les démarches préliminaires fondamentales dans de nombreux problèmes pratiques. Mais, comme on a observé [3], il ne semble pas qu'il existe une méthode simple pour établir le rang d'une matrice et, par conséquent la compatibilité d'un système d'équations linéaires. Ce problème, ainsi que celui du choix des lignes ou des colonnes linéairement indépendantes, font partie de questions fondamentales, encore toujours non résolues (du point de vue pratique) d'une maniére satisfaisante.

Les considérations suivantes permettent non seulement d'établir le rang de la matrice, donc aussi la compatibilité d'un système, à l'aide des des méthodes les plus simples: de la racine carrée et des facteurs proportionnels, – mais encore de trouver les lignes ou colonnes linéairement indépendantes, ce qui a une grande importance dans la théorie de l'expérience [2].

Soient $\boldsymbol{R}$ et $\boldsymbol{G}$, $\boldsymbol{H}$ les matrices obtenues par décomposition d'une matrice $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^T$ en facteurs élémentaires par la méthode de la racine carrée ou par celle des facteurs proportinnels respectivment [1], c'est-à-dire $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^T = \boldsymbol{R}^T\boldsymbol{R} = \boldsymbol{G}\boldsymbol{H}$. Evidenment, les matrices $\boldsymbol{R}^T$ et $\boldsymbol{G}$ sont des triangles inférieurs, tandis que la matrice $\boldsymbol{H}$ est un triangle supérieur dont la diagonale est formée d'unités.

Théorème. *Le rang d'une matrice $\boldsymbol{A}$ est égal au nombre d'éléments différents de zéro de la diagonale de la matrice $\boldsymbol{R}$ ou $\boldsymbol{G}$ obtenues par la décomposition de $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^T$ en facteurs élementaires par la méthode modifiée de la racine carrée ou par celle des facteurs proportionnels.*

Démonstration. On sait que le rang d'une matrice $\boldsymbol{A}$ est égal au rang de la matrice $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^T$. Dans le cas d'une matrice carrée de plein rang il exists une racine carrée triangulaire pour $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^T$ où tous les éléments de la diagonale sont différents de zéro ([1], p. 220), ce qui démontre la conclusion. Pour une matrice quelconque, la méthode classique de la racine carrée de la décomposition de $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^T$ ne peut être utilisée du moment où apparaissent des éléments égaux à zéro dans la diagonale de la matrice $\boldsymbol{R}$ ($\boldsymbol{AA}^T = \boldsymbol{R}^T\boldsymbol{R}$). Une légère modification de cette méthode permet cependant de décomposer $\boldsymbol{AA}^T = \boldsymbol{R}^T\boldsymbol{R}$, où la diagonale peut comporter des zéros.

Du théorème fondamental de Banachiewicz il résulte que toute matrice se laisse décomposer en produits de matrices élémentaires. Ceci concerne donc en particulier la matrice symétrique $\boldsymbol{AA}^T$ étudié ici. Supposons que seules les lignes i^e et k^e de la matrice $\boldsymbol{A}$ soient linéairement dépendantes. Evidemment les mêmes lignes sont linéairement dépendantes dans la matrice $\boldsymbol{AA}^T$. Soient $\boldsymbol{b}_i$ et $\boldsymbol{b}_k$ des lignes de la matrice $\boldsymbol{AA}^T$. Il existe des constantes α_1, α_2 telles que $\alpha_1\boldsymbol{b}_i + \alpha_2\boldsymbol{b}_k = 0$, $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 > 0$. Donc $\boldsymbol{b}_k = \lambda\boldsymbol{b}_i$ où $\alpha_1/\alpha_2 = -\lambda$. De plus en vertu de la symétrie de la matrice $\boldsymbol{AA}^T$, une dépendance de la même forme a lieu entre les colonnes à indices correspondants à ces lignes. La matrice $\boldsymbol{AA}^T$ se laisse noter comme suit:

$$\boldsymbol{AA}^T = \begin{bmatrix} b_{11} \dots b_{1i} \dots b_{1k} \dots b_{1n} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ b_{i1} \dots b_{ii} \dots b_{ik} \dots b_{in} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ b_{k1} \dots b_{ki} \dots b_{kk} \dots b_{kn} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ b_{n1} \dots b_{ni} \dots b_{nk} \dots b_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11} \dots b_{1i} \dots \lambda b_{1i} \dots b_{1n} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ b_{i1} \dots b_{ii} \dots \lambda b_{ii} \dots b_{in} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \lambda b_{i1} \dots \lambda b_{ii} \dots \lambda^2 b_{ii} \dots \lambda b_{in} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ b_{n1} \dots b_{ni} \dots \lambda b_{ni} \dots b_{nn} \end{bmatrix}.$$

Nous cherchons une décomposition de $\boldsymbol{AA}^T$ sous la forme

$$\boldsymbol{AA}^T = \begin{bmatrix} r_{11} & 0 \dots\dots\dots\dots & 0 \\ r_{12} & r_{22} \; 0 \dots\dots\dots & 0 \\ \dots\dots & \dots\dots\dots\dots & \dots \\ r_{1i} & r_{2i} \dots r_{ii} \; 0 \dots & 0 \\ \dots\dots & \dots\dots\dots\dots & \dots \\ r_{1n} & r_{2n} \dots\dots\dots\dots & r_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & \dots r_{1i} \dots & r_{1n} \\ 0 & r_{22} & \dots r_{2i} \dots & r_{2n} \\ \dots & \dots & \dots\dots\dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots r_{ii} \dots & r_{in} \\ \dots & \dots & \dots\dots\dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 \dots\dots & r_{nn} \end{bmatrix}$$

La décomposition de la matrice $\boldsymbol{AA}^T$ en facteurs élémentaires par la méthode de la racine carrée ou par celle des facteurs proportionnels ne présente aucune difficulté lorsque le calcul des éléments de la matrice $\boldsymbol{R}$ comporte les éléments d'une sous-matrice de dimension $(k-1) \times (k-1)$. En vertu du théorème de Banachiewicz ([1], p. 220) aucun zéro n'apparaîtra aux $(k-1)$ premières places de la diagonale de la metrice $\boldsymbol{R}$. Nous démontrerons maintenant que $r_{kk} = 0$.

Remarquons d'abord que $r_{ik} = \lambda r_{li}$, $l = 1, 2, \dots, k-1$, ou plus précisément

$$r_{lk} = \begin{cases} \lambda r_{li} & \text{pour} \quad l = 1, 2, \dots, i \\ 0 & \text{pour} \quad l = i+1, i+2, \dots, k-1\,. \end{cases}$$

En effet, l'égalité

$$(7) \qquad r_{lk} = \frac{1}{r_{ll}} \left[b_{lk} - \sum_{m=1}^{l-1} r_{ml} r_{mk} \right]$$

est vérifiée pour $l = 1, 2, \ldots, k - 1$, car pour ces valeurs l, $r_{ll} \neq 0$. En observant que $b_{lk} = \lambda b_{li}$, $r_{1p} = b_{1p}/\sqrt{b_{11}}$, $p = 1, 2, \ldots, n$, nous obtenons $r_{1k} = \lambda r_{1i}$. Mettant cette valeur dans (7) et tenant compte de $b_{lk} = \lambda b_{li}$, on a $r_{2k} = \lambda r_{2i}$. Procédant ainsi $l = 1, 2, \ldots, i$-fois, compte tenu de l'égalité

$$\left(b_{li} - \sum_{m=1}^{l-1} r_{ml} r_{mi}\right) / r_{ll} = r_{li} ,$$

nous avons $r_{lk} = \lambda r_{li}$, où $r_{li} \neq 0$ si $b_{li} \neq 0$, $l = 1, 2, \ldots, i$.

Observons à présent que de

$$\lambda \sum_{m=1}^{i+1} r_{m,i+1} r_{mi} = \lambda b_{i+1,i} , \quad b_{lk} = \lambda b_{li} ,$$

résulte

$$r_{i+1,k} = \frac{1}{r_{i+1,i+1}} \lambda \left[b_{i+1,i} - \sum_{m=1}^{i} r_{m,i+1} r_{mi} \right] = 0$$

et de même de

$$\sum_{m=1}^{i+1} r_{m,i+2} r_{mk} = \sum_{m=1}^{i} r_{m,i+2} r_{mk} = \lambda \sum_{m=1}^{i} r_{m,i+2} r_{mi} = \lambda b_{i+2,i} ,$$

on a $r_{i+2,k} = 0$. En procédant de cette manière $i + 1 \leqq s \leqq k - 1$ fois nous obtenons $r_{sk} = 0$.

Il faut encore démontrer que $r_{kk} = 0$. Les observations précédents et l'égalité

$$r_{1k}^2 + r_{2k}^2 + \ldots + r_{ik}^2 + \ldots + r_{k-1,k}^2 + r_{kk}^2 = b_{kk} ,$$

donnent

$$\lambda^2 (r_{1i}^2 + r_{2i}^2 + \ldots + r_{ii}^2) + r_{kk}^2 = b_{kk} , \quad \lambda^2 b_{ii} + r_{kk}^2 = b_{kk} .$$

Mais $b_{kk} = \lambda^2 b_{ii}$, donc $r_{kk} = 0$.

Observons ensuite que pour $r_{k,k+1}, r_{k,k+2}, \ldots, r_{kn}$ les équations deviennent des identirés, donc au lieu de $r_{k,k+1}, r_{k,k+2}, \ldots, r_{kn}$ nous pouvons admettre n'importe quels nombres. Il n'est donc pas besoin de diviser par r_{kk} ce qui, dans notre cas, ne serait pas possible. En particulier, nous pouvons admettre $r_{k,k+1} = r_{k,k+2} = \ldots = r_{kn} = 0$. Un tel choix simplifie considérablement les calcul ultérieurs.

Pour achever la démonstration, il suffit de démontrer qu'aucun des autres éléments de la diagonale de la matrice $\mathbf{R}$ n'est égal à zéro. Comme les dernières $(n - k)$ des colonnes ne dépendent pas des k prémières, un raisonnement analogue à celui de ([1], p. 219) nous assure que d'autres éléments 0 ne feront pas appartion dans la diagonale de la matrice $\mathbf{R}$.

La démonstration a été faite dans le cas de deux lignes (ou colonnes) linéairement dépendantes. La généralisation pour $2 \leqq l \leqq n - 1$) lignes linéairement dépendantes ne présente pas de difficultés essentielles.

Le théorème constitue une généralisation du théorème de Banachiewicz ([1], p. 220) portant sur l'existence d'une racine triangulaire. Evidemment, cette racine n'est pas établie d'une façon univoque. Du théorème il résulte:

Corollaire 1. *Les lignes (colonnes) linéairement indépendantes de la matrice* $\mathbf{A}$ *ont les mêmes indices que les lignes de la matrice* $\mathbf{R}^T$ *qui comportent des éléments différents de zéro dans la diagonale.*

Corollaire 2. *Le système d'équations* $\mathbf{AX} = \mathbf{W}$ *est compatible seulement si le nombre d'éléments différents de zéro dans* $\mathbf{R}$ *(*$\mathbf{R}$ *est la matrice obtenue par décomposition de* $\mathbf{AA}^T$ *par la méthode décrite dans la démonstration du théorème) est égal au nombre d'éléments différents de zéro de la matrice* $\mathbf{R}_W$, *obtenue par décomposition de la matrice* $(\mathbf{A}, \mathbf{W})(\mathbf{A}, \mathbf{W})^T$.

Exemple. Déterminons le rang de la matrice

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 2 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 1 & -2 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

La méthode de la racine carrée donne

$$\mathbf{AA}^T = \begin{bmatrix} 8 & 2 & -6 & -2 & 0 & 6 & -5 \\ 2 & 12 & 2 & -12 & 2 & -2 & 1 \\ -6 & 2 & 7 & -2 & 1 & -7 & 3 \\ -2 & -12 & -2 & 12 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & -2 & 7 & -1 & 0 \\ 6 & -2 & -7 & 2 & -1 & 7 & -3 \\ -5 & 1 & 3 & -1 & 0 & -3 & 5 \end{bmatrix} =$$

$$
= \begin{bmatrix}
2\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\frac{\sqrt{2}}{2} & \sqrt{\frac{23}{2}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\frac{-3\sqrt{2}}{2} & \frac{7}{2}\sqrt{\frac{2}{23}} & \sqrt{\frac{33}{23}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\frac{-\sqrt{2}}{2} & -\sqrt{\frac{23}{2}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 2\sqrt{\frac{2}{23}} & \frac{9}{23}\sqrt{\frac{33}{23}} & 0 & \sqrt{\frac{72}{11}} & 0 & 0 \\
\frac{3\sqrt{2}}{2} & -\frac{7}{2}\sqrt{\frac{2}{23}} & -\sqrt{\frac{33}{23}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\frac{-5\sqrt{2}}{4} & \frac{9}{4}\sqrt{\frac{2}{23}} & -\sqrt{\frac{33}{23}} & 0 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix} \cdot
$$

$$
\cdot \begin{bmatrix}
2\sqrt{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{3\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{3\sqrt{2}}{2} & -\frac{5\sqrt{2}}{4} \\
0 & \sqrt{\frac{23}{2}} & \frac{7}{2}\sqrt{\frac{2}{23}} & -\sqrt{\frac{23}{2}} & 2\sqrt{\frac{2}{23}} & -\frac{7}{2}\sqrt{\frac{2}{23}} & \frac{9}{4}\sqrt{\frac{2}{23}} \\
0 & 0 & \sqrt{\frac{33}{23}} & 0 & \frac{9}{23}\sqrt{\frac{23}{33}} & -\sqrt{\frac{33}{23}} & -\sqrt{\frac{33}{23}} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{\frac{72}{11}} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix}
$$

Nous en tirons la conclusion que le rang de la matrice $\boldsymbol{A}$ est égal à 4, tandis que les lignes linéairement indépendantes sont:

$$
(1\ 2\ 1\ 0\ -1\ 0\ -1\ 0),\quad (1\ 0\ 1\ 0\ -1\ 2\ 1\ 2),\quad (-1\ -2\ 0\ 0\ 0\ 1\ 1\ 0),
$$
$$
(0\ 0\ 1\ 2\ 1\ 1\ 0\ 0).
$$

On peut obtenir le même résultat par la méthode des facteurs proportionnels, car

$$
\boldsymbol{AA}^T = \boldsymbol{GH} = \begin{bmatrix}
8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
2 & \frac{23}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-6 & \frac{7}{2} & \frac{33}{23} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-2 & -\frac{23}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 2 & \frac{9}{23} & 0 & \frac{72}{11} & 0 & 0 \\
6 & -\frac{7}{2} & -\frac{33}{23} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-5 & \frac{9}{4} & -\frac{33}{23} & 0 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}
1 & \frac{1}{4} & -\frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4} & -\frac{5}{8} \\
0 & 1 & \frac{7}{23} & -1 & \frac{4}{23} & -\frac{7}{23} & \frac{9}{46} \\
0 & 0 & 1 & 0 & \frac{3}{11} & -1 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{bmatrix}
$$

Signalons enfin la possibilité d'appliquer les résultats présentés ici à de très importants problèmes de la théorie de l'expérience. L'un de ces problèmes est la recherche d'estimateurs linéaires et la vérification d'hypothèses concernant des paramètres inconnus $\Theta_1, \Theta_2, \ldots, \Theta_m$ [2]. On sait que pour $\Theta_1, \Theta_2, \ldots, \Theta_m$ il existe un estimateur linéaire unique non biaisé, à variance minimale, si et seulement si le rang de la matrice $\mathbf{A}^T$ est égal au rang de la matrice $(\mathbf{A}^T, \mathbf{b})$, où $a_{ij}, b_1, b_2, \ldots, b_m$ sont des constantes ([2], p. 2). Si cette égalité de ranges n'a pas lieu, l'estimateur linéaire aussi bien que l'estimation $\boldsymbol{\Theta} = (\hat{\Theta}_1, \ldots, \hat{\Theta}_m)$ de paramètres inconnus ne peuvent pas être établies d'une façon univoque. Les formules pour ces grandeurs comme aussi pour les tests concernant les hypothèses sur $\boldsymbol{\Theta}$, telles que $\boldsymbol{\Theta} = \mathbf{0}$, $\mathbf{b}^T\boldsymbol{\Theta} = \mathbf{0}$ comportent des colonnes linéairement indépendantes de la matrice $\mathbf{A}$. Le nombre de ces colonnes et la méthode qui permet de les déterminer sont donnés par le théorème et le corollaire 1.

Observons encore que le théorème, donnant la façon de déterminer le rang d'une matrice, pourra faciliter l'examen d'équations linéaires comportant des matrices rectangulaires ou singulières par conséquent aussi celui des fonctions estimables, étudiées dans [3] et [4].

Ouvrages cités

[1] *T. Banachiewicz:* Rachunek krakowianowy, PWN, Warszawa 1959.

[2] *M. C. Charkabati:* Mathematics of design and analysis of experiments, New York 1962.

[3] *C. Radhakrishna Rao:* A note on generalized inverse of a matrix with application to problems in mathematical statistics, J. Roy. Stat. Soc. Vol. 24, 1, (1962), ser. B., p. 152.

[4] *S, R. E. Searle:* Additional results concerning estimable functions and generalized inverse matrices, J. Roy. Stat. Soc. Vol. 27, 3, (1965), ser. B., p. 486.

Souhrn

POZNÁMKA O HODNOSTI MATICE

DOMINIK SZYNAL et JAN SZYNAL

Je dána jednoduchá metoda výpočtu hodnoty matice a výběru nezávislých sloupců nebo řádek. Metody lze prakticky použít např. v teorii experimentů.

Adresses des auteurs: Dr. *Dominik Szynal*, Chaire de Statistique Mathématique, Université M. Curie-Skłodowska, Lublin, ul. Nowotki 8, Pologne; Mgr. *Jan Szynal*, Chaire de Fonctions Analytiques, Université M. Curie-Skłodowska, Lublin, ul. Nowotki 8, Pologne.