Marcel Jiřina

Některé vlastnosti nelineárních obvodu a fyzikální význam jakobiánu

Aplikace matematiky, Vol. 18 (1973), No. 2, 77--82

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/103453`

SVAZEK 18 (1973) APLIKACE MATEMATIKY ČÍSLO 2

NĚKTERÉ VLASTNOSTI NELINEÁRNÍCH OBVODŮ A FYZIKÁLNÍ VÝZNAM JAKOBIÁNU

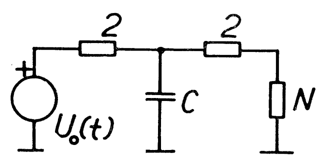
MARCEL JIŘINA

(Došlo dne 4. února 1970)

V práci se dokazuje jedna věta o souvislosti jakobiánu s druhou derivací integrálních křivek diferenciálních rovnic, které se vyskytují např. při analýze nelineárních obvodů.

1. ÚVOD

Je dobře známo, že časové odezvy nelineárních obvodů mohou mít nespojitosti. Takové nespojitosti jsou důsledky rychlých překlopení klopných obvodů, přeskoků na charakteristikách nelineárních prvků se záporným odporem aj. V bodech nespojitosti nejsou splněny podmínky existence a jednoznačnosti řešení soustavy diferenciálních rovnic popisujících chování obvodu, [1], resp. systému, přestože všechny funkce jsou v těchto bodech spojitě diferencovatelné. Ukazuje se, že jakobián souvisí s druhou derivací časových průběhů.



Obr. 1 Schéma obvodu k příkladu 1

Příklad 1. Uvažujme obvod na obr. 1 s nelineárním odporem N řízeným napětím podobně jako např. tunelová dioda s charakteristikou vyjádřenou rovnicí

$$i = u^3 - u$$

Pro obvod platí dvě rovnice sestavené metodou uzlových napětí:

$$(1) \qquad \begin{aligned} F_1(t, \dot{u}_c, u_c, u) &= \dot{u}_c C - \tfrac{1}{2}u + u_c - \tfrac{1}{2}U_0(t) = 0 \\ F_2(t, \dot{u}_c, u_c, u) &= - \tfrac{1}{2}u - \tfrac{1}{2}u_c + u^3 = 0\,. \end{aligned}$$

Jakobián zobrazení $F = (F_1, F_2)$ definovaný vztahem:

$$(2) \qquad J = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial \dot{u}_c} & \dfrac{\partial F_1}{\partial u} \\ \dfrac{\partial F_2}{\partial \dot{u}_0} & \dfrac{\partial F_2}{\partial u} \end{vmatrix}$$

je

$$J = C(3u^2 - \tfrac{1}{2}).$$

Vyloučením u_c z obou rovnic (1) dostáváme snadno jednu implicitní rovnici $C(6u^2 - 1)\dot{u} + 2u^3 - \frac{3}{2}u - \frac{1}{2}U_0(t) = 0$, kterou budeme psát $F(t, u, p) = 0$, kde $p = \dot{u} = \mathrm{d}u/\mathrm{d}t$. Řešení rovnice nebude činit potíže, dokud $J \neq 0$. Obráceně obtíže mohou nastat, když $J = 0$, tzn. když již nejde o diferenciální rovnici, tedy $u = \pm 1/\sqrt{6}$ při $C \neq 0$.

Podle [2] nejde v bodech, kde $u = \pm 1/\sqrt{6}$ ani o singulární řešení ani o křivku bodů dotyku dvou nesousedních partikulárních integrálů, ani o křivku inflexních bodů, protože $F_t = \partial F/\partial t \neq 0$, $F_u = \partial F/\partial u \neq O$ a $Ft + pF_u \neq 0$. Všimneme si obecně těchto zajímavých bodů.

2. SOUSTAVA DIFERENCIÁLNÍCH A NEDIFERENCIÁLNÍCH ROVNIC V IMPLICITNÍM TVARU

Lemma 1. *Nechť je dána soustava implicitně definovaných rovnic*

$$(3) \qquad f(x, y, y', z) = 0$$

a bod $(a, b, c, d,) \in R^1 \times R^n \times R^n \times R^m$ *tak, že pro zobrazení* f:

$R^1 \times R^n \times R^n \times R^m \to R^n \times R^m$ *platí*

(i) $f(a, b, c, d) = 0$,

(ii) *existuje okolí* U *bodu* (a, b, c, d) *takové, že zobrazení* f *je spojitě diferencovatelné na* U,

(iii) *jakobián* J *zobrazení* $f_{(a,b)}, (y', z) : R^n \times R^m \to R^n \times R^m$ *je od nuly různý v bodě* (c, d).

Potom existují okolí $O_1 \subset R^1$ *a* $O_2 \subset R^n \times R^m$ *bodů* a *a* (b, d) *taková, že v* $O_1 \times O_2$ *leží právě jedno spojitě diferencovatelné zobrazení* $(y(x), z(x)) : O_1 \to O_2$, *které je řešením rovnice* (3) *a které vyhovuje podmínkám* $y(a) = b$, $y'(a) = c$ *a* $z(a) = d$.

Důkaz. I. Je-li $n = 0$, plyne správnost věty přímo z věty o implicitně definovaných funkcích.

II. Nechť $n \neq 0$. Porovnáním s větou o implicitně definovaných funkcích dostáváme, že existuje okolí $A \subset R^1 \times R^n$ bodu (a, b), okolí $C \subset R^n \times R^m$ bodu (c, d) a jediné zobrazení $g: A \to C$, takové, že

(a) $g(a, b) = (c, d)$,

(b) $f(x, y, g(x, y)) = 0$ pro každý bod $(x, y) \in A$,

(c) g je zobrazení spojitě diferencovatelné na A.

Označme $g = (g_1, g_2)$ tak, aby

$$y' = g_1(x, y) . \tag{4}$$

Z toho plyne, že rovnice (4) splňuje podmínky Cauchyho věty o existenci a jednoznačnosti řešení diferenciální rovnice a existuje tedy okolí O bodu (a, b, c), v němž leží právě jedno řešení (y, z) rovnice (3), vyhovující podmínkám $y(a) = b$, $y'(a) = c$ a $z(a) = d$ a je spojitě diferencovatelné.

Lemma nám nepřímo říká, že k daným „výchozím" počátečním podmínkám (a, b) může existovat i více řešení podle toho, kolik různých kořenů (c, d) má rovnice (3). Zde již máme víceznačnost vyjádřenu prakticky explicitně, navíc jsou pochyby o řešení vůbec, neboť není na první pohled jisté, máli rovnice (3) vůbec řešení. Dá se však dokázat věta podobná lemmatu 1, ale ve tvaru ekvivalence.

Věta 1. *Nechť je dána soustava rovnic*

$$f(x, y, y', z) = 0 \tag{5}$$

a bod $(a, b, c, d) \in R^1 \times R^n \times R^n \times R^m$ tak, že pro zobrazení $f: R^1 \times R^n \times R^n \times R^m \to R^n \times R^m$ platí

(i) $f(a, b, c, d) = 0$,

(ii) *existuje okolí U bodu (a, b, c, d) takové, že zobrazení f je spojitě diferencovatelné na U,*

(iii) *matice*

$$\left[\frac{\partial f(x, y, y', z)}{\partial(y', z)}, \frac{\partial f(x, y, y', z)}{\partial x} + \frac{\partial f(x, y, y', z)}{\partial y} y'\right]$$

má v bodě (a, b, c, d) hodnost $m + n$.

Potom nutná a postačující podmínka pro to, aby existovala okolí $O_1 \subset R^1$ bodu a, $O_2 \subset R^n \times R^m$ bodu (b, d) taková, že existuje právě jedno zobrazení $(y(x), z(x))$: $: O_1 \to O_2$, které je řešením rovnice (5), pro něž je $y(a) = b$, $y'(a) = c$, $z(a) =$ kde funkce $y(x)$ je dvakrát spojitě diferencovatelná a funkce $z(x)$ je spojitě diferencovatelná je, že Jacobiho matice $\mathbf{J}_{(a,b)}(y', z)$ zobrazení $f_{(a,b)}(y', z) : R^n \times R^m \to R^n \times R^m$, $f_{(a,b)}(\zeta, \eta) = f(a, b, \zeta, \eta)$, je regulární v bodě (c, d).

Důkaz. 1. Podmínky (i), (ii) a $\mathbf{J}_{(a,b)}(c, d) \neq 0$ jsou shodné s podmínkami lemmatu 1. Tedy existuje okolí O_1 bodu a okolí O_2 bodu (b, d) takové, že existuje právě jedno spojitě diferencovatelné zobrazení $(y(x), z(x))$, které je řešením rovnice (5) a pro něž je $y(a) = b$, $y'(a) = c$, $z(a) = d$.

2. $J_{(a,b)}(c, d) \neq 0$ je nutnou podmínkou pro to, aby funkce $y(x)$ byla dvakrát spojitě diferencovatelná a $z(x)$ byla spojitě diferencovatelná.

Nechť $p(x) = (y'(x), z(x))$.

Pak rovnice (5) má tvar $f(x, y(x), p(x)) = 0$.

Předpokládejme, že $p(x)$ je spojitě diferencovatelná funkce.

Potom platí

$$F(x) = f(x, y(x), p(x)) = 0$$

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}x} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} y' + \frac{\partial f}{\partial p} p' = 0$$

pro všechna $(x, y, p) \in U$.

V bodě (a, b, c, d) musí tedy být

$$\frac{\partial}{\partial x} f(a, b, c, d) + \frac{\partial}{\partial y} f(a, b, c, d)\, c + \mathbf{J}_{(a,b)}(c, d)\, p'(a) = 0\,.$$

Tuto rovnici lze považovat za soustavu lineárních rovnic vzhledem k neznámým $p'(a)$. Přitom $\mathbf{J}_{(a,b)}(c, d)$ je matice soustavy a

$$-\left(\frac{\partial}{\partial x} f(a, b, c, d) + \frac{\partial}{\partial y} f(a, b, c, d)\, c\right)$$

je vektor pravých stran.

Podle předpokladu (iii) má rozšířená matice soustavy (5) hodnost $n + m$. Taková soustava nehomogenních lineárních rovnic má jediné řešení právě tehdy, když matice soustavy má hodnost $n + m$, tj., když determinant soustavy je nenulový. To znamená, že z předpokladu, že $p'(a)$ jsou určena jednoznačně, plyne $J_{(a,b)}(c, d) \neq 0$.

Podmínku (iii) nelze z předpokladů vyloučit.

3. DISKUZE VĚTY Z FYZIKÁLNÍHO HLEDISKA

Nezávisle proměnnou je čas. Uvažujme napřed mechanickou soustavu. Řešením rovnic budou časové průběhy nějakých souřadnic, tedy dráhy (nebo úhly). První derivace vektoru dráhy je vektor rychlosti, druhá derivace je vektor zrychlení. Přitom síly a zrychlení jsou často v uvažované oblasti všude definované spojité funkce. Lze pak mluvit o systémech se spojitým zrychlením. Kritérium takového systému je podle věty 1 právě nenulovost jakobiánu.

U elektrických obvodů se soustředěnými parametry jsou hledanými funkcemi, představujícími řešení příslušné soustavy rovnic, časové průběhy napětí a proudů. Všimněme se nejdříve napětí. Systém se spojitým zrychlením má tedy spojité druhé derivace napětí, je-li toto napětí stavovou veličinou, tj. vyskytuje-li se v rovnicích také jeho derivace, a má spojité první derivace, nejde-li o stavovou veličinu. Derivace napětí podle času vystupuje v rovnicích obvodu explicitně jen pro napětí na kapacitách, nebo pro napětí, která s napětími na kapacitách souvisí. Uvažujme jen lineární časově neproměnnou kapacitu. Jelikož platí

$$C \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = i \tag{6}$$

je časový průběh proudu spojitou funkcí se spojitou první derivací jen pokud $J \neq 0$, jinak musí být v důsledku věty 1 na časovém průběhu proudu přinejmenším „zlom", tj. nespojitost první derivace, případně i nespojitost proudu. Obecně první derivace v bodě kde $J = 0$ nemusí existovat. Jestliže stavovou veličinou je náboj kondenzátoru q, je pak proud i $= \mathrm{d}q/\mathrm{d}t$. Porovnáním s (6) vidíme, že pro časový průběh proudu platí totéž, co v případě, že stavovou veličinou je napětí na kondenzátoru. Duálně totéž co pro proud kondenzátoru platí pro napětí na indukčnosti. Stavovou veličinou je v tomto případě proud nebo magnetický tok.

Způsob vyšetřování, může-li být jakobián roven nule, který se opírá o elektrické vlastnosti obvodu, je podrobně ukázán v [3] a častečně v [4].

Literatura

[1] *Stern T. E.:* Computer-aided analysis of nonlinear networks described by constrained differential equations. Proc. of International Symp. on Network Theory, Belgrade 1968, s. 179—190.

[2] *Ince E. L.:* Ordinary Differential Equations, 1927.

[3] *Jiřina M.:* Solvability of the equations of the networks with lumped general variable parameters. Information processing machines Sborník VÚMS, č. 20, 1973.

[4] *Jiřina M.:* Řešitelnost rovnic nelineárních obvodů sestavených metodou uzlových napětí. Elektrotechnický časopis č. 1, 1972.

Souhrn

SOME PROPERTIES OF NONLINEAR CIRCUITS AND A PHYSICAL INTERPRETATION OF JACOBIAN

MARCEL JIŘINA

A practical problem leads to the investigation of a system of equations in the form $f(x, y', z) = 0$. The well-known theorem on the solvability of the system of equations in the form $f(x, y, y') = 0$ applies also to the above system. The condition that the Jacobian $\mathbf{J} = \partial f / \partial(y', z)$ is nonzero is, under the corresponding assumptions, sufficient for the existence of a solution $(y(x), z(x))$ of the system. Further the necessity of this condition is proved if the functions $z(x)$ and $y(x)$ are required to be respectively once and twice continuously differentiable. The presented theorem may be applied in mechanics as well as in the theory of electric circuits with concentrated parameters.

Adresa autora: Ing. *Marcel Jiřina*, CSc, Výzkumný ústav matematických strojů, Lužná 9, 160 00 Praha 6.