RECENSE

C. Constantinescu, A. Cornea: POTENTIAL THEORY ON HARMONIC SPACES. Springer Verlag, Berlin—Heidelberg—New York, 1972 (Die Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, Band 158); stran 355, cena DM 98 ($ 31.10).

Cílem teorie harmonických prostorů je podat ucelený, jednoduchý a přitom dostatečně široký axiomatický systém teorie potenciálu, který by umožňoval přenést většinu pojmů klasické teorie potenciálu (např. pojem harmonické a superharmonické funkce, potenciálu, Dirichletovy úlohy, polární množiny, balayage, jemné topologie, Martinovy hranice apod.) do obecné teorie. Abstraktní pohled pak vyjasňuje vzájemný vztah principů teorie potenciálu a poskytuje elegantní jednotící nadhled na různé oblasti teorie potenciálu. Vytváří také spojovací článek mezi teorií parciálních diferenciálních rovnic a Markovských procesů.

Klasická teorie potenciálu je v podstatě studiem vlastností harmonických funkcí, tj. řešení Laplaceovy rovnice. Při odvození velké většiny podstatných výsledků teorie potenciálu se užívá pouze několika základních faktů (např. funkce harmonická v okolí každého bodu oblasti je hamornická v oblasti, věta o řešitelnosti Dirichletovy úlohy pro kouli, Harnackova věta), které lze přirozeným způsobem zobecnit. Zhruba řečeno, harmonický prostor je lokálně kompaktní topologický prostor opatřený svazkem funkcí (zvaných funkce harmonické), na nějž jsou axiomaticky kladeny dodatečné požadavky připomínající některé principy klasické teorie potenciálu. Axiomy harmonického prostoru mají lokální charakter a poskytují tak možnost vyšetřování diferenciálních rovnic na varietách a na Riemannových plochách.

Pokus vytvořit axiomatickou teorii pomocí svazku harmonických funkcí se objevuje (v poněkud primitivní a speciální formě) zhruba před 30 lety (G. Tautz). Důležitým impulzem pro další rozvoj abstraktní teorie potenciálu byl axiomatický systém předložený v r. 1954 J. L. Doobem. Jeho teorie, dosti blízká k teorii užívané v současné době, mimo jiné ukázala, že také parabolické rovnice mohou být přirozeným způsobem uvažovány v kontextu teorie potenciálu. Na dalším rozvoji abstraktní teorie potenciálu se podílela velká řada matematiků. Podstatným přínosem jsou především výsledky francouzských matematiků (M. Brelot, R. M. Hervé a další), německých matematiků (H. Bauer a jeho žáci) a bezesporu vynikající práce rumunských specialistů (N. Boboc, C. Constantinescu, A. Cornea).

Recenzovaná kniha je druhá monografie rumunské autorské dvojice (první je věnována ideálním hranicím Riemannových ploch). Kniha „Teorie potenciálu v harmonických prostorech" odráží současný stav axiomatické teorie potenciálu a podává obecný přístup zahrnující pojetí Brelotovo a Bauerovo. Výchozím bodem pro definici harmonického prostoru není (na rozdíl od starších teorií) svazek harmonických funkcí, nýbrž hyperharmonický svazek na lokálně kompaktním topologickém prostoru (který může také být kompaktní a nemusí mít spočetnou bázi). Tento přístup (po teoretické stránce svým způsobem komplikovanější) umožňuje např. jednodušší důkaz tvrzení, že řešení rovnice pro vedení tepla určují harmonický prostor splňující příslušné axiomy. V knize jsou velmi detailně studovány analogy všech důležitých výsledků klasické i moderní teorie potenciálu (které nesouvisí s pojmem energie). Pouze otázky duality harmonických prostorů a kompaktifikace harmonických prostorů jsou ponechány stranou, neboť v tomto směru nebylo dosaženo uspokojivých obecných výsledků.

Kniha je rozdělena do tří částí. V první z nich jsou studovány harmonické a hyperharmonické svazky a konvergenční vlastnosti harmonických funkcí (zhruba řečeno se jedná o různé obecnější verze Harnackovy věty). Protože v konkrétních příkladech (např. pro rovnici pro vedení tepla) je velmi nesnadné dokázat existenci báze regulárních množin, autoři zavádějí a studují pojem resolutivní množiny. Jsou to v podstatě takové množiny, pro něž lze rozumným způsobem zavést perronovské zobecněné řešení Dirichletovy úlohy. Značnou důležitost hraje pojem kvaziregulární množiny (kvaziregulární množina, na níž platí věta o minimu, je resolutivní a při aplikaci teorie lze často ověřit, že daná množina je kvaziregulární). Dále jsou uvedena dvě kriteria (Brelot, Bauer) zaručující, že na uvažované množině platí princip minima pro hyperharmonické funkce. Harmonický prostor je definován pomocí svazku hyperharmonických funkcí a čtyř axiomů a jsou studovány superharmonické funkce a potenciály na harmonickém prostoru. Pro prostory, na nichž existuje kladný potenciál, je dokázána důležitá věta o stejnoměrné aproximaci spojitých funkcí rozdíly spojitých potenciálů. Autoři také ukazují, v jakém smyslu je jejich teorie zobecněním Brelotovy a Bauerovy axiomatiky. V závěru první části jsou uvedeny dva důležité příklady: Laplaceova rovnice a rovnice pro vedení tepla.

Druhá část knihy je věnována obecným otázkám teorie harmonických prostorů. Přístup je zcela obecný, např. v kapitole 4 (konvexní kužel spojitých funkcí na Baireově topologickém prostoru) se o harmonických prostorech vlastně nemluví. Teprve speciální volba (za kužel se vezme systém nezáporných hyperharmonických funkcí a za topologický prostor harmonický prostor s jemnou topologií) dává zásadní výsledky pro harmonické prostory. Kromě jemné topologie se detailně rozebírá balayage a jsou vyšetřovány důležité třídy výjimečných množin teorie potenciálu (absorbční, polární a semipolární množiny). Dokazuje se abstraktní verze Brelot-Cartanovy věty o konvergenci superharmonických funkcí a pojem kapacity je definován ve značné obecnosti. Dále je v této části vyšetřováno specifické uspořádání a zkoumají se speciální třídy potenciálů.

Poslední část monografie se zabývá třemi speciálními otázkami teorie harmonických prostorů. První z nich se týká axiomu polarity a dominačního axiomu. (Tyto axiomy nejsou splněny pro parabolické rovnice.) Jedna kapitola je věnována pravděpodobnostním aspektům teorie potenciálu. Pro jistou třídu harmonických prostorů je zkonstruována pologrupa P taková, že P-excesivní funkce splývají s nezápornými hyperharmonickými funkcemi daného prostoru. Poslední kapitola se týká integrální reprezentace nezáporných superharmonických funkcí (zobecnění Herglotzovy věty, Rieszovy a Martinovy reprezentace). Tato kapitola užívá dosti hlubokých poznatků teorie topologických lineárních prostorů (nukleární prostory, Choquetova teorie apod.).

Většina paragrafů knihy je doprovázena (většinou velmi obtížnými) cvičeními (v textu jich je celkem téměř 300). Některá z nich obsahují příklady či protipříklady k uvedené teorii. Jiná rozšiřují vyloženou látku a často obsahují celé teorie, jejichž detailní výklad se najde v citované literatuře. Právě ve cvičeních je řada výsledků, které budou zajímat matematiky z jiných oborů. Monografie je doplněna seznamem literatury (přes 260 titulů), která je buď citována v textu nebo má úzký vztah ke studované problematice.

V knize je obsaženo velice rozsáhlé množství materiálu z abstraktní teorie potenciálu. Od řady jiných monografií se tato kniha liší tím, že její velká část je pojata novým, dosud nikde nepublikovaným způsobem. Forma výkladu je většinou maximálně obecná. V knize se vyskytují některá nedopatření a tiskové chyby; jejich počet je malý v porovnání s rozsahem knihy a čtenář příslušné chyby většinou snadno odstraní. Styl zpracování je přesný, ale stručný. Historické poznámky a odkazy na literaturu doplňují průběžně celý text. Požadavky na předběžné matematické vědomosti jsou dosti velké. Pro čtení knihy není nutno ovládat klasickou teorii potenciálu, ani dřívější axiomatiky. Pro porozumění však se mi zdá nezbytné mít alespoň dosti slušné vědomosti v tomto směru. Nedomnívám se, že by bylo rozumné tuto knihu doporučit pro „první čtení“. V každém případě tato monografie představuje vynikající pojednání o teorii potenciálu v harmonických prostorech a ideální zdroj odkazů na výsledky z tohoto oboru.

Cíl, který si autoři vytkli, byl nesmírně obtížný. Splnili ho více než úspěšně, odevzdali nepředstavitelnou práci a vyplnili tak mezeru, která již v literatuře o teorii potenciálu byla citelná. Tak jako oba autoři svými výsledky silně ovlivnili dosavadní vývoj abstraktní teorie potenciálu, bude mít bezesporu jejich kniha velký vliv na další rozvoj této matematické disciplíny.

Ivan Netuka

P. Jagers, L. Råde (editors): MATHEMATICS AND STATISTICS. Essays in Honour of Harald Bergström. Published by Department of Mathematics, Chalmers Inst. of Technology and The Univ. of Göteborg, Sweden, 1973. 121 stran, cena 35 Skr.

Ve sborníku je publikován seznam prací H. Bergströma a 10 původních článků různých autorů. Sborník by se tudíž dal přirovnat k nějakému číslu mezinárodního časopisu o teorii pravděpodobnosti a matematické statistice. Hlavním cílem této recenze je podat pokud možno stručně a výstižně jejich charakteristiku. Proto uvedu vždy autora a název a pak připojím krátkou poznámku o obsahu článku.

E. S. Andersen: On the equivalence principle in fluctuation theory. Týká se symetricky závislých náhodných veličin, tj. takových veličin, jejichž sdružené rozdělení je invariantní vůči permutaci proměnných.

S. Holm: Asymptotic power and expected sample size of SPR — tests in one parameter exponential families. Autor dostává stejné vzorce jako u SPR — testů v případě procesu Brownova pohybu. Asymptotické vzorce nedávají lepší aproximaci než dosavadní, ale jsou jednodušší.

P. Jagers: A limit theorem for sums of random numbers of i.i.d. random variables. Týká se součtu náhodného počtu náhodných veličin. S touto problematikou se setkáváme v teorii větvících se procesů a tam, kde může dojít k přerušení náhodného výběru. Limitní věta se týká konvergence k procesu Brownova pohybu.

O. Kallenberg: A canonical representation of symmetrically distributed random measures. V článku je rozšířen výsledek známý pro jednoduché bodové procesy na neklesající procesy se záměnnými přírůstky a na symetricky rozdělené náhodné míry.

E. Lukacs: A characterization of the multi-variate negative binomial distribution. Negativně binomické rozdělení v p-rozměrném případě se zavádí pomocí charakteristické funkce. V práci se toto rozdělení charakterizuje pomocí jisté regresní vlastnosti.

A. Prékopa: A note on logarithmic concave measures. Autor navazuje na své předchozí práce o tomto tématu. V lineárních vektorových prostorech studuje vlastnosti integrálu z logaritmicko konkávní funkce podle logaritmicko konkávní míry.

M. Rao: Note on spherical harmonics. Použitý přístup je založen na Poissonově integrálním vzorci, což má některé výhody před metodikou dosud používanou.

M. Rudemo: On a random transformation of a point process to a Poisson process. V článku je konstruována transformace založená na intervalových vlastnostech bodového procesu.

R. Savage: Incomplete contingency tables: conditions for the existence of unique MLE. Práce se týká problematiky neúplných kontingenčních tabulek, kdy některá políčka mají apriori nulové četnosti.

V. V. Yurinskii: Summing variances in L_p. Autor se zabývá otázkou, zda charakteristické funkcionály a momenty mohou být využívány i v Banachových prostorech.

Práce v tomto sborníku jsou orientovány teoreticky. Mají dobrou úroveň a jsou cennými příspěvky k rozvoji moderních směrů teorie pravděpodobnosti a matematické statistiky.

Jiří Anděl