

Aplikace matematiky

Vlado Čech

Algoritmy. 33. Krylov. Určenie charakteristického polynomu matice Krylovovou metódou

Aplikace matematiky, Vol. 18 (1973), No. 6, 465--468

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/103503>

Terms of use:

© Institute of Mathematics AS CR, 1973

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://project.dml.cz>

ALGORITMY

33. KRYLOV

URČENIE CHARAKTERISTICKÉHO POLYNÓMU MATICE
KRYLOVOVOU METÓDOU

VLADO ČECH, MFFUK, Praha

Nech \mathbf{A} je štvorcová matica rádu n , \mathbf{v} nenulový vektor. Nech vektory $\mathbf{v}, \mathbf{A}\mathbf{v}, \dots, \mathbf{A}^{k-1}\mathbf{v}$ sú lin. nezávislé, ale spolu s vektorom $\mathbf{A}^k\mathbf{v}$ nech sú už lin. závislé. Uvažujme sústavu k lin. rovníc s k neznámymi b_0, b_1, \dots, b_{k-1} :

$$(1) \quad \mathbf{A}^k\mathbf{v} + b_{k-1}\mathbf{A}^{k-1}\mathbf{v} + \dots + b_0\mathbf{v} = \mathbf{0}$$

Ak $k = n + 1$, tak riešením sústavy (1) sú koeficienty charakteristického polynómu $x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \dots + b_0$ matice \mathbf{A} ($b_n = 1$).

Ak $k \leq n$, dôjde k *štiepeniu*: podľa [2] riešením sústavy (1) sú koeficienty niektorého deliteľa char. polynómu a existuje matica rádu $n - k + 1$, s ktorou sa postup zopakuje. Tak určíme niekoľko deliteľov char. polynómu (takých, že ich vynásobením vznikne char. polynóm), tj. miesto polynómu stupňa n určíme najmenej dva polynómy nižších stupňov, čo je výhodné pre neskoršie hľadanie koreňov.

Procedúra pracuje s pevným počiatočným vektorom $\mathbf{v} = \mathbf{e}_1$ a k štiepeniu dochádza vždy, ak je matica blokoviadiagonálna, alebo vznikla z blokoviadiagonálnej matice permutáciou.

procedure KRYLOV($n, A, m, eps, P, Q, INVMAT, SUCIN$);

value n ;

integer m, n ; **real** eps ; **integer array** P ; **array** Q ;

procedure INVMAT, SUCIN;

comment n ... rád matice

A ... pole, deklarované v hlavnom programe s rozmermi $1 : n$,
 $1 : n$, obsahuje prvky matice, prácou procedúry sa jeho
 pôvodný obsah zničí

m ... výstupný parameter, udáva, koľko zložiek je obsadených
 v poliach P, Q

eps ... ak $|x| \leq eps$, tak reálne x pokladáme za nulové, voľba eps
 závisí na počítači

- P, Q* ... výstupné parametre, polia, deklarované v hlavnom programe s rozmerom $1 : 2 \times n$, zložka $P[i]$ obsahuje celé číslo, udávajúce pri ktorej mocnине premennej v char. polynóme (či jeho deliteli) stojí koeficient uložený v $Q[i]$ ($i = 1, 2, \dots, m$), údaje o polynóme sú uložené v poradí od najvyššej mocniny po abs. členu a ak došlo k štiepeniu, tak údaje o príslušných deliteľoch char. polynómu sú uložené v poliach P, Q bezprostredne za sebou (pozri príklad)
- INVMAT* ... procedúra na inverziu matice s parametrami n (**integer**), A, B (**array** $A, B[1 : n, 1 : n]$) v tomto poradí, určí inverznú maticu k matici A a uloží ju do B
- SUCIN* ... procedúra na násobenie matíc s parametrami p, q, r (**integer**), A, B, C (**array** $A[1 : p, 1 : q], B[1 : q, 1 : r], C[1 : p, 1 : r]$) v tomto poradí, vynásobí maticu A maticou B a výsledok uloží do C ;

```

begin integer i, j, l, r, s; real w;
integer array Z[1 : n]; array B[1 : n + 1, 1 : n], K, V[1 : n, 1 : n + 1];
m := Z[1] := 1;
LA: for i := 2 step 1 until n do
begin Z[i] := i; V[i, 1] := 0 end;
V[1, 1] := 1.0; j := 1;
LB: l := j; j := j + 1;
for i := 1 step 1 until n do
begin V[i, j] := 0;
for r := 1 step 1 until n do
V[i, j] := A[i, r] × V[r, l] + V[i, j];
B[j, i] := V[i, j]
end;
for i := l step -1 until 2 do
begin w := B[j, i]; B[j, i] := B[j, Z[i]]; B[j, Z[i]] := w end;
K[1, j] := -B[j, 1];
for i := 2 step 1 until l do
begin K[i, j] := -B[j, i]/B[i, i];
for r := i + 1 step 1 until n do
B[j, r] := K[i, j] × B[i, r] + B[j, r]
end;
for i := j step 1 until n do
if abs(B[j, i]) > eps then go to LC;
go to LD;

```

```

LC: if  $i = j$  then go to LB;
     $r := Z[j]$ ;  $Z[j] := Z[i]$ ;  $Z[i] := r$ ;
    for  $r := 2$  step 1 until  $j$  do
        begin  $w := B[r, j]$ ;  $B[r, j] := B[r, i]$ ;  $B[r, i] := w$  end;
    go to LB;

LD: for  $r := 2$  step 1 until  $l$  do
    begin  $K[r, 2] := 0$ ;
        for  $s := j - r + 1$  step 1 until  $l$  do
             $K[r, 2] := K[j - r, s] \times K[s, j] + K[r, 2]$ 
        end;
    for  $r := 3$  step 1 until  $l$  do
        for  $s := 3$  step 1 until  $r$  do
            begin  $K[r, s] := 0$ ;
                for  $i := j - r + 1$  step 1 until  $j - s + 1$  do
                     $K[r, s] := K[j - r, i] \times K[j - i, s - 1] + K[r, s]$ 
                end;
            end;
         $P[m] := l$ ;  $Q[m] := 1.0$ ;  $m := m + 1$ ;
        for  $i := j - 2$  step  $-1$  until  $0$  do
            begin  $P[m] := i$ ;  $Q[m] := K[i + 1, j]$ ;  $s := l - i$ ;
                for  $r := 2$  step 1 until  $s$  do  $Q[m] := Q[m] + K[s, r]$ ;
                 $m := m + 1$ 
            end;
        if  $l = n$  then go to LE;
        for  $i := j$  step 1 until  $n$  do
            begin for  $r := 1$  step 1 until  $n$  do  $K[i, r] := 0$ ;
                 $K[i, i] := 1.0$ 
            end;
        for  $i := j$  step 1 until  $n$  do
            for  $r := 1$  step 1 until  $n$  do
                 $V[r, i] := B[r, i - l] := K[i, Z[r]]$ ;
        INVMAT( $n, V, K$ ); SUCIN( $n, n, n, K, A, V$ ); SUCIN( $n, n, n - l, V, B, K$ );
         $n := n - l$ ;
        for  $i := 1$  step 1 until  $n$  do
            for  $r := 1$  step 1 until  $n$  do  $A[i, r] := K[l + i, r]$ ;
        go to LA;

LE:  $m := m - 1$ 
end;

```

Príklad: *KRYLOV*(7, *A*, *m*, ₁₀-7, *P*, *Q*, *INVMAT*, *SUCIN*);

$$\text{matica } A = \begin{pmatrix} 1.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 7.0 & 6.0 & 5.0 \\ 0.0 & 0.36 & -0.5 & 3.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 1.0 & 1.0 & 2.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & -2.0 & 0.4 & 1.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 7.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 10.0 & 8.0 & 7.0 \\ 6.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 8.0 & 10.0 & 9.0 \\ 5.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 7.0 & 9.0 & 10.0 \end{pmatrix}$$

výsledok	<i>m</i> = 9	<i>i</i>	<i>P</i>	<i>Q</i>
		1	4	1.00000000
		2	3	-3.09999482 ₁₀ 1
		3	2	2.59984474 ₁₀ 1
		4	1	3.24000000 ₁₀ 2
		5	0	-2.70983642 ₁₀ 2
		6	3	1.00000000
		7	2	-2.36000000
		8	1	7.42000004
		9	0	-9.77200004

Teda char. polynóm matice *A* je súčinom polynómov

$$x^4 - 30.9999482x^3 + 25.9984474x^2 + 324x - 270.983642$$

a

$$x^3 - 2.36x^2 + 7.42000004x - 9.77200004.$$

Spočítanie tohto príkladu (s tlačou matice a výsledkov) trvalo na počítači MINSK 22 4,03 min, kým napr. spočítanie príkladov s maticami 4. rádu bez štiepenia trvalo okolo 50 s.

Rýchlosť procedúry *KRYLOV* je pri štiepení značne ovplyvnená rýchlosťou procedúry *INVMAT*.

Procedúra bola vytvorená v rámci cvičenia z num. matematiky na MFFUK.

Literatúra

- [1] *Faddějev, Faddějevová*: Numerické metody lin. algebry, SNTL, Praha 1964.
 [2] *A. S. Householder*: The Theory of Matrices in Numerical Analysis, Blaisdell Publishing Company, New York, Toronto, London 1965.

OPRAVA

V algoritmu č. 29 LAGUER, uveřejněném v Aplikacích matematiky 18 (1973) č. 1 na str. 75 ve 4. řádce shora má být 3.50000000 místo 2.50000000. a na str. 74 v 13. řádce shora má být $i := 1$ místo $i := \text{step}$.