Milan Geryk

Algoritmy. 35. LAGRANGE. Lagrangeova interpolace n proměnných

Aplikace matematiky, Vol. 19 (1974), No. 2, 136--138

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/103521

ALGORITMY

35. LAGRANGE

LAGRANGEOVA INTERPOLACE N PROMĚNNÝCH

MILAN GERYK, Přerov, Výzkumný ústav Přerovských strojíren

Nechť je dána hladká funkce N nezávisle proměnných $x_1, x_2, \ldots, x_N$ tabelovaná v jistém oboru Ω analogickém kvádru. Nezávisle proměnné v tabulce nabývají hodnot

$$(1) \qquad (x_1 =)\, x_{11}, x_{12}, \ldots, x_{1K_1}, \quad (x_2 =)\, x_{21}, x_{22}, \ldots, x_{2K_2}, \ldots, \ldots, (x_N =)\, x_{N1}, x_{N2}, \ldots, x_{NK_N}.$$

Hodnoty nemusejí být ekvidistantní. Pro všechna i je $K_i \geqq 2$. Pro každou kombinaci indexů udává tabulka závisle proměnnou y:

$$(2) \qquad y_{11\ldots11}, y_{11\ldots12}, y_{11\ldots13}, \ldots, y_{11\ldots1K_N}, y_{11\ldots21}, \ldots, y_{11\ldots2K_N}, \ldots, \ldots, y_{11\ldots K_{N-1}K_N}, \ldots, y_{K_1K_2\ldots K_{N-1}K_N}$$

tak, že $y_{i_1\ldots i_n}$ znamená hodnotu funkce y v bodě $\{x_{1i_1}, \ldots, x_{Ni_N}\}$.

Počet těchto funkčních hodnot je tedy

$$(3) \qquad M = \prod_{i=1}^{N} K_i .$$

Hledáme přibližnou funkční hodnotu S v bodě

$$(4) \qquad \{z_1, z_2, \ldots, z_N\} \in \Omega .$$

Použijeme zobecněné Lagrangeovy interpolační formule, která je vyložena např. v knize Isaacson-Keller: Analysis of numerical methods.

$$(5) \qquad S = \sum_{1}^{M} \left[y_{i_1 i_2 \ldots i_N} \prod_{j=1}^{N} F_{j i_j} \right],$$

kde

$$F_{ji_j} = \tag{6}$$

$$= \frac{(z_j - x_{j,1})(z_j - x_{j,2})\dots(z_j - x_{j,i_j-1})(z_j - x_{j,i_j+1})\dots(z_j - x_{j,K_j})}{(x_{j,i_j} - x_{j,1})(x_{j,i_j} - x_{j,2})\dots(x_{j,i_j} - x_{j,i_j-1})(x_{j,i_j} - x_{j,i_j+1})\dots(x_{j,i_j} - x_{j,K_j})}$$

odpovídá j-té proměnné při vynechání i_j-tého kořenového činitele. Znak $\sum$ v rovnici (5) znamená sčítání přes všechny indexy $i_1 = 1, \dots, K_1, \dots, i_N = 1, \dots, K_N$.

V následující proceduře $K[1 : N]$ je pole typu **integer** obsahující čísla $K_1, K_2, \dots \dots, K_N$,

$X[1 : \sum_{i=1}^{N} K_i]$ pole s čísly (1), $Y[1 : M]$ pole s čísly (2), $Z[1 : N]$ pole s čísly (4). Příkaz za návěštím $L1$ lze vynechat; jeho ponechání je výhodné v případě velkých K_i, rovnají-li se některé souřadnice v Z hodnotám z X. Rovněž příkaz za návěštím $L3$ lze vynechat; jeho ponechání je výhodné v případě velkého N, opět rovnají-li se některé souřadnice v Z hodnotám z X.

```
procedure LAGRANGE (N, K, X, Y, Z, S);
value N; integer N; integer array K; array X, Y, Z; real S;
begin integer I, J, L, M, I1, I2, I3; integer array index, INDEX, C [1 : N];
   for I := 1 step 1 until N do
   if I = 1 then begin index [I] := 1; INDEX [I] := M := K[1] end
             else begin index[I] := index[I − 1] + K[I − 1];
                        INDEX[I] := INDEX[I − 1] + K[I]; M := M × K[I] end;
   J := INDEX[N];
   begin array P[1 : J]; real T, U, R;
      I := I2 := 0;
      for L := 1 step 1 until J do
      begin if L > I2 then begin I := I + 1; I1 := index[I]; I2 := INDEX[I];
                             T := Z[I] end;
         R := 1.0; U := X[L];
         for I3 := I1 step 1 until I2 do
         if I3 ≠ L then begin R := R × (T − X[I3])/(U − X[I3]);
                             L1: if R = 0.0 then go to L2 end;
         L2: P[L] := R
      end;
```

```
      for I := 1 step 1 until N do C[I] := index[I];
      S := 0.0;
      for I := 1 step 1 until M do
      begin R := Y[I];
         for I3 := 1 step 1 until N do begin L := C[I3]; R := R × P[L];
                                     L3: if R = 0.0 then go to L4 end;
         L4: S := S + R; I3 := N;
         LL: if C[I3] = INDEX[I3] then begin C[I3]: = index[I3]; I3 := I3 − 1;
                                        if I3 ≠ 0 then go to LL end
                                  else C[I3] := C[I3] + 1
      end
   end
end LAGRANGE;
```

Příklad 1. Tabulka (1) má tvar ($N = 3$, $K_1 = 3$, $K_2 = 2$, $K_3 = 2$):

x_1	1	1	1	1	2	2	2	2	3	3	3	3
x_2	7	7	8	8	7	7	8	8	7	7	8	8
x_3	4	5	4	5	4	5	4	5	4	5	4	5
y	1	2	2	3	3	4	4	5	5	6	6	7

Tedy $K = \{3; 2; 2\}$, $X = \{1; 2; 3; 7; 8; 4; 5\}$, Y obsahuje právě čtvrtý řádek tabulky. V bodě $Z = \{1.1; 7.1; 4.1\}$ dostaneme $S = 1.4$.