

# Aplikace matematiky

---

Klaus Lommatzsch

Ein notwendiges und hinreichendes Optimalitätskriterium für allgemeine quadratische Optimierungsprobleme

*Aplikace matematiky*, Vol. 19 (1974), No. 3, 193–197

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/103530>

## Terms of use:

© Institute of Mathematics AS CR, 1974

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

EIN NOTWENDIGES UND HINREICHENDES  
OPTIMALITÄTSKRITERIUM FÜR ALLGEMEINE QUADRATISCHE  
OPTIMIERUNGSPROBLEME

KLAUS LOMMATZSCH

(Eingegangen am 8. März 1973)

Die Aufgabe lautet

$$(1) \quad \min \{f(x, x) \mid x \in M\},$$

dabei bezeichnen:

$M$  eine konvexe abgeschlossene Teilmenge eines  $n$ -dimensionalen affinen Raumes  $A^n$ ;  
 $x^T = (x_1, \dots, x_n)$  Elemente des  $A^n$ ;

$f(x, x)$  eine über dem  $A^n$  definierte quadratische Funktion

$$(2) \quad f(x, x) = x^T C x + 2p^T x,$$

wobei  $C$  eine reellwertige symmetrische  $(n \times n)$ -Matrix und  $p$  ein reellwertiger  $n$ -gliedriger Vektor sind.

DIE ZUGEORDNETE PARAMETRISCHE AUFGABE

Der Aufgabe (1) wird das folgende lineare mehrparametrische Problem mit dem Parametervektor  $y$  in der Zielfunktion zugeordnet:

$$(3) \quad \min \{f(y, x) \mid x \in M\}, \quad y \in A^n,$$

wobei

$$(4) \quad f(y, x) = y^T C x + p^T x + p^T y.$$

Unter der Lösung einer Aufgabe (3) wird die Angabe einer bestimmten Aufteilung des Raumes der Parameter  $y$  verstanden (vgl. dazu [1]). Eine solche Aufteilung läßt sich mit Hilfe der folgenden  $K$ -Mengen erzeugen:

(5) **Definition.** Es sei  $\bar{x}$  ein Elementen aus  $M$ , dann wird  $K_M^{\bar{x}}$ ,

$$K_M^{\bar{x}} = \{y \in A^n \mid f(y, x) \geq f(y, \bar{x}), x \in M\},$$

als die zu  $\bar{x}$  gehörige  $K$ -Menge der Aufgabe (3) bezeichnet.

Für die  $K$ -Mengen lassen sich nun eine Reihe von Eigenschaften nachweisen:

- (6) – die  $K$ -Mengen sind konvex und abgeschlossen;
- (7) – der Durchschnitt von zu einer Aufgabe (3) gehörenden  $K$ -Mengen ist wieder eine  $K$ -Menge dieser Aufgabe;
- (8) – gilt für zwei  $K$ -Mengen  $K_M^{\bar{x}}$  und  $K_M^{\hat{x}}$  einer Aufgabe (3), daß  $K_M^{\bar{x}} \neq K_M^{\hat{x}}$  ist, so haben beide  $K$ -Mengen entweder höchstens Randpunkte gemeinsam oder eine der beiden  $K$ -Mengen liegt ganz im Rand der anderen  $K$ -Menge;
- (9) – hat die Matrix  $C$  in (4) den Rang  $n$ , so sind die  $K$ -Mengen einer solchen Aufgabe Kegel mit dem Scheitelpunkt  $y^s$ , wobei  $Cy^s + p = 0$ ;
- (10) – ist der Rang  $d$  der Matrix  $C$  in (4) kleiner als  $n$ , so sind die nichtleeren  $K$ -Mengen einer solchen Aufgabe „Bündel“  $(n - d)$ -dimensionaler Unterräume des  $A^n$ .

Eine eingehendere Untersuchung zu den  $K$ -Mengen einschließlich einer Darstellung des Zusammenhangs zu den Stabilitätsbereichen parametrischer Aufgaben findet sich in [2].

Liegen zwei Aufgaben der Art (3) vor, und unterscheiden sie sich nur darin, daß der Restriktionsbereich  $M^1$  der einen Aufgabe Teilmenge des Restriktionsbereiches  $M^2$  der anderen Aufgabe ist, so gilt für die  $K$ -Mengen  $K_{M^1}^{\bar{x}}$  und  $K_{M^2}^{\bar{x}}$  mit  $\bar{x} \in M^1$ , daß

$$(11) \quad K_{M^2}^{\bar{x}} \subset K_{M^1}^{\bar{x}}.$$

## DIE QUADRATISCHE AUFGABE

Der im vorangegangenen Abschnitt eingeführte Raum der Parameter  $y$  und der Raum der Elemente  $x$  lassen sich als ein und derselbe Raum ansehen. Die durch die  $K$ -Mengen erzeugte Aufteilung des Parameterraumes impliziert dann auch eine Aufteilung von  $M$ . Damit werden Aussagen der Art  $\hat{x} \in K_M^{\bar{x}}$ ,  $\hat{x} \in /K_M^{\bar{x}}$  mit  $\bar{x}$ ,  $\hat{x} \in M$  sinnvoll und man kann von den zu einer Aufgabe (1) gehörenden  $K$ -Mengen sprechen.

Die Aufgabe (1) möge nun in  $x^0 \in M$  ein lokales Minimum besitzen, d.h. es existiert eine Umgebung  $U$  von  $x^0$  derart, daß

$$(12) \quad f(x, x) \geq f(x^0, x^0), \quad x \in U(x^0) \cap M.$$

(13) **Lemma.** Besitzt  $f(x, x)$  über  $M$  in  $x^0$  ein lokales Minimum, so gilt  $x^0 \in K_M^{x^0}$ .

Beweis. Es sei  $\bar{x}$  ein Element aus  $M$ ,  $\bar{x} \neq x^0$ . Der Konvexität von  $M$  wegen liegt auch die Strecke

$$(14) \quad G(\bar{x}, x^0) = \{x \in A^n \mid x = v\bar{x} + (1-v)x^0, 0 \leq v \leq 1\}$$

in  $M$ . Der Anstieg  $\varphi_G(v)$  von  $f(x, x)$  über  $G(\bar{x}, x^0)$  läßt sich in folgender Weise darstellen (dabei wird die Voraussetzung der Symmetrie der Matrix  $C$  ausgenutzt):

$$(15) \quad \frac{1}{2}\varphi_G(v) = v(f(\bar{x}, \bar{x}) - f(\bar{x}, x^0)) + (1-v)(f(x^0, \bar{x}) - f(x^0, x^0)).$$

Nach Voraussetzung existiert ein  $\bar{v} > 0$  derart, daß  $\frac{1}{2}\varphi_G(v) \geq 0$  für  $0 \leq v < \bar{v}$ . Daraus folgt  $f(x^0, \bar{x}) \geq f(x^0, x^0)$ . Da  $\bar{x}$  beliebig aus  $M$  gewählt war, gilt damit  $x^0 \in K_M^{x^0}$ .

(16) **Lemma.** *Besitzt  $f(x, x)$  über  $M$  in  $x^0$  ein lokales Minimum und gilt  $x^0 \in K_M^{\bar{x}}$  mit  $\bar{x} \in M$  und  $\bar{x} \neq x^0$ , so folgt entweder  $\bar{x} \in K_M^{\bar{x}}$  oder  $f(x, x)$  ist über der (durch (14) definierten) Strecke  $G(\bar{x}, x^0)$  konstant.*

Beweis. Nach Voraussetzung und Lemma 1 gilt, daß  $x^0 \in K_M^{\bar{x}} \cap K_M^{x^0}$ ; daraus folgt unter Verwendung der Definition (5), daß  $f(x^0, \bar{x}) = f(x^0, x^0)$  ist.

Unter Verwendung der Formeln (14) und (15) erhält man dann aber  $f(\bar{x}, \bar{x}) \geq f(\bar{x}, x^0)$ ; d.h. aus der Voraussetzung, daß  $f(x, x)$  über  $M$  in  $x^0$  ein lokales Optimum besitzt, ergibt sich dann, daß der Anstieg  $\varphi_G(v)$  von  $f(x, x)$  über der gesamten Strecke  $G(\bar{x}, x^0)$  nichtnegativ ist. Gilt  $\varphi_G(1) > 0$ , so hat man  $f(\bar{x}, \bar{x}) > f(\bar{x}, x^0)$ , also  $\bar{x} \in K_M^{\bar{x}}$ ; für  $\varphi_G(1) = 0$  bekommt man  $f(\bar{x}, \bar{x}) = f(\bar{x}, x^0)$ , d.h.  $f(x, x)$  ist über  $G(\bar{x}, x^0)$  konstant.

Das Lemma (16) läßt sich noch verschärfen, dazu wird die Eigenschaft (11) parametrischer Aufgaben ausgenutzt:

(17) **Lemma.** *Besitzt  $f(x, x)$  über  $M$  in  $x^0$  ein lokales Minimum und gilt  $x^0 \in K_M^{\bar{x}}$  mit  $\bar{x} \neq x^0$ , so folgt entweder  $\bar{x} \in K_{G(\bar{x}, x^0)}^{\bar{x}}$  oder  $G(\bar{x}, x^0) \subset K_{G(\bar{x}, x^0)}^{\bar{x}} \cap K_{G(\bar{x}, x^0)}^{x^0}$ .*

Beweis. Nach (11) gilt, daß  $x^0$  auch in  $K_{G(\bar{x}, x^0)}^{\bar{x}} \cap K_{G(\bar{x}, x^0)}^{x^0}$  liegt. Da  $f(x, x)$  auch über  $G(\bar{x}, x^0)$  in  $x^0$  ein lokales Minimum besitzt, folgt dann wieder wie im Beweis zu Lemma (16), daß  $f(x^0, \bar{x}) = f(x^0, x^0)$  und damit  $f(\bar{x}, \bar{x}) \geq f(\bar{x}, x^0)$  ist. Gilt  $f(\bar{x}, \bar{x}) > f(\bar{x}, x^0)$ , so bedeutet das  $\bar{x} \in K_{G(\bar{x}, x^0)}^{\bar{x}}$ ; besteht dagegen die Gleichheit  $f(\bar{x}, \bar{x}) = f(\bar{x}, x^0)$ , so ist auch  $f(\bar{x}, \bar{x}) = f(\bar{x}, x)$  und  $f(\bar{x}, x^0) = f(\bar{x}, x)$  für alle  $x \in G(\bar{x}, x^0)$ , das bedeutet aber  $\bar{x} \in K_{G(\bar{x}, x^0)}^{\bar{x}} \cap K_{G(\bar{x}, x^0)}^{\bar{x}}$ , womit Lemma (17) vollständig gezeigt ist.

Die so nachgewiesenen notwendigen Bedingungen für ein lokales Minimum einer Aufgabe (1) führen zu einem notwendigen und hinreichenden Optimalitätskriterium:

(18) **Satz.** Die Bedingungen

a)  $x^0 \in K_{x^0}^M \cap M$ ,

b) aus  $x^0 \in K_M^{\bar{x}} \cap K_M^{x^0}$  folgt entweder  $\bar{x} \in |K_{G(\bar{x}, x^0)}^{\bar{x}}$  (Fall 1)

oder  $G(\bar{x}, x^0) \subset K_{G(\bar{x}, x^0)}^{\bar{x}} \cap K_{G(\bar{x}, x^0)}^{x^0}$  (Fall 2)

(wobei  $G(\bar{x}, x^0)$  durch (14) definiert ist), sind notwendig und hinreichend dafür, daß  $f(x, x)$  über  $M$  in  $x^0$  ein lokales Minimum besitzt.

**Beweis.** Die Notwendigkeit der Bedingungen (a) und (b) ergibt sich aus den Lemmata (13), (16) und (17).

Es sei nun  $x^0$  ein Element aus  $M$ , welches die Bedingung a) des Satzes erfüllt. Dann gilt  $f(x, x^0) \geq f(x^0, x^0)$  für alle  $x \in M$ . Ist  $f(x, x^0) > f(x^0, x^0)$  für alle  $x \in M$  mit  $x \neq x^0$ , so gibt es eine Umgebung  $U$  von  $x^0$ , daß  $f(x, x)$  auf den Strecken  $G(x, x^0)$  aus  $M$  in  $U(x^0)$  in Richtung auf  $x^0$  abnimmt. Gilt für ein  $\bar{x} \in M$ , daß  $f(\bar{x}, x^0) = f(x^0, x^0)$ , so bedeutet das, daß  $x^0 \in K_M^{\bar{x}}$ . Nach Bedingung b) folgt dann (Fall 1), daß es ein  $\hat{x} \in G(\bar{x}, x^0)$  gibt mit  $f(\bar{x}, \bar{x}) > f(\bar{x}, \hat{x})$ . Wegen der Linearität der Funktion  $f(\bar{x}, x)$  führt das zu  $f(\bar{x}, \bar{x}) > f(\bar{x}, x^0)$ , d.h. längst dieser Strecke  $G(\bar{x}, x^0)$  nimmt  $f(x, x)$  in Richtung auf  $x^0$  ab (vgl. dazu Darstellung (15)). Der Fall 2 der Bedingung b) führt direkt zu  $f(x, x) = f(x^0, x^0)$  für alle  $x \in G(\bar{x}, x^0)$ .

Damit kann  $f(x, x)$  längst aller in  $M$  gelegenen Strecken mit dem Endpunkt  $x^0$  in einer gewissen Umgebung  $U(x^0)$  in Richtung auf  $x^0$  nicht mehr zunehmen, womit auch die Hinlänglichkeit der Bedingungen a) und b) gezeigt ist.

Aus diesem Satz (18) ergibt sich insbesondere auch das nachfolgende Optimalitätskriterium:

(19) **Lemma.** Gilt  $x^0 \in K_M^{x^0} \cap M$  und  $x^0 \in |K_M^{\bar{x}}$  für alle  $x$  aus  $M$  mit  $x \neq x^0$ , so besitzt  $f(x, x)$  über  $M$  in  $x^0$  ein lokales Optimum.

Die Voraussetzung dieses Satzes ist offenbar erfüllt, falls  $x^0$  ein relativ innerer Punkt von  $K_M^{x^0}$  ist und keine andere  $K$ -Menge der betrachteten Aufgabe  $K_M^{x^0}$  umfaßt (vgl. (8)).

Für den Fall konvexer Zielfunktionen in Aufgaben der Art (1) vereinfacht sich das Optimalitätskriterium aus Satz (18):

(20) **Lemma.** Es sei  $f(x, x)$  eine über  $M$  konvexe Funktion. Die Bedingung  $x^0 \in K_M^{x^0} \cap M$  ist dann notwendig und hinreichend dafür, daß die Aufgabe (1) in  $x^0$  ein lokales Optimum besitzt.

Zum Nachweis dieser Behauptung ist nur zu beachten, daß aus der Konvexität von  $f(x, x)$  über  $M$  folgt, daß für beliebig gewählte Punkte  $\bar{x}$  und  $x^0$  aus  $M$  die Ungleichung

$$f(\bar{x}, \bar{x}) - f(\bar{x}, x^0) \geq f(\bar{x}, x^0) - f(x^0, x^0)$$

gilt.

Lemma (20) legt die Vermutung nahe, daß zwischen den Kuhn-Tucker-Bedingungen für Aufgaben der Art (1) und der Bedingung, daß ein Punkt aus  $M$  in der ihm zugehörigen  $K$ -Menge liegt, eine enge Beziehung besteht. Für den Fall eines polyedrischen Restriktionsbereiches  $M$ , d.h.  $M = \{x \in A^n \mid B^i x \leq b_i, i = 1, \dots, m\}$ , läßt sich mit Hilfe des Satzes von Farkas die Äquivalenz der beiden genannten Kriterium sofort einsehen: die Bedingung  $x^0 \in K_M^{x^0} \cap M$  führt zu dem System

$$((x^0)^T C + p)^T (x - x^0) \geq 0, \quad B^i(x - x^0) \leq b_i, \quad i \in I^0,$$

wobei die Indexmenge  $I^0 \subset \{1, \dots, m\}$  gerade die Indizes enthält, für die  $B^i x^0 = b_i$  gilt; dieses System ist aber genau dann lösbar, falls es Zahlen  $u_i \geq 0, i \in I^0$ , gibt, mit

$$-((x^0)^T C + p) = \sum_{i \in I^0} u_i B^i;$$

letztere Beziehung stellt aber eine notwendige und hinreichende Bedingung für die Gültigkeit der Kuhn-Tucker-Bedingungen dar (vgl. dazu z.B. [3]).

#### Literatur

- [1] *Nožička, F. - Guddat, J. - Bank, B. - Hollatz, H.*: Theorie der linearen parametrischen Optimierung. Akademie-Verlag Berlin 1973.
- [2] *Lommatzsch, K.*: Lineare parametrische Optimierung über allgemeinen konvexen Restriktionsbereichen. Sborník z II. celostátní konference O matematických metodách v ekonomii, Harmonia 1972. Ekonom'cko matematická laboratoř při Ekonom'ckém ústavu ČSAV, Praha 1973.
- [3] *Künzi, H. P. - Krelle, W.*: Nichtlineare Programmierung. Springer-Verlag, Berlin—Göttingen—Heidelberg 1962.

#### Souhrn

### NUTNÁ A POSTAČUJÍCÍ KRITÉRIA OPTIMALITY PRO OBECNÉ ÚLOHY KVADRATICKÉHO PROGRAMOVÁNÍ

KLAUS LOMMATZSCH

Článek se zabývá úlohou minimalizace kvadratické funkce na konvexním a uzavřeném restriktivním oboru. Pomocí tzv.  $K$ -množin, přiřazených výchozí úloze, je formulováno a dokázáno kritérium optimality jako vztah mezi body a množinami (věta 18). Souvislost tohoto kritéria s Kuhn - Tuckerovými podmínkami je ukázána pro případ, že je cílová funkce kvadratické úlohy konvexní a restriktivní obor polyedrický.

*Anschrift des Verfassers:* Dr. Klaus Lommatzsch, Sektion Mathematik der Humboldt-Universität zu Berlin. Unter den Linden 6, 108 Berlin, DDR.