

Klaus Lommatzsch

Über die Lage lokaler Minima quadratischer Optimierungsaufgaben

Aplikace matematiky, Vol. 19 (1974), No. 3, 198--202

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/103531>

Terms of use:

© Institute of Mathematics AS CR, 1974

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://project.dml.cz>

ÜBER DIE LAGE LOKALER MINIMA QUADRATISCHER OPTIMIERUNGSAUFGABEN

KLAUS LOMMATZSCH

(Eingegangen am 8. März 1973)

Die nachfolgenden Untersuchungen beziehen sich auf die Aufgabe

$$(1) \quad \min \{f(x, x) \mid x \in M\},$$

dabei sind

M eine abgeschlossene, konvexe Teilmenge des A^n ,

$f(x, x)$ eine über dem A^n definierte quadratische Funktion,

d.h.

$$(2) \quad f(x, x) \equiv x^T C x + 2p^T x,$$

wobei C eine symmetrische Matrix bezeichnet.

Zur Charakterisierung der Lage der lokalen Minima einer Aufgabe (1) wird die durch die sog. K -Mengen erzeugte Aufteilung von M genutzt: ein Punkt $\bar{x} \in A^n$ gehört genau dann zur K -Menge $K_M^{\hat{x}}$, $\hat{x} \in M$ einer Aufgabe (1), falls $f(\bar{x}, x) \geq f(\bar{x}, \hat{x})$ für alle $x \in M$ gilt, dabei ist

$$(3) \quad f(x^1, x^2) \equiv (x^1)^T C x^2 + p^T x^1 + p^T x^2.$$

Die K -Mengen stehen in enger Beziehung zu den Stabilitätsbereichen der linearen parametrischen Optimierung [1]; eine eingehendere Darstellung von Eigenschaften der K -Mengen findet sich in [2].

Für das weitere sind die nachfolgenden Aussagen über die K -Mengen interessant:

- (4) – die K -Mengen sind konvex und abgeschlossen;
- (5) – wenn x^1, \dots, x^k Elemente aus M sind, so ist der Durchschnitt $K_M^{x^v}$ der K -Mengen $K_M^{x^1}, \dots, K_M^{x^k}$ wieder eine K -Menge, sie gehört zu den Punkten $x^v = \sum_{i=1}^k v_i x^i$ mit $0 < v_i < 1$ für $i = 1, \dots, k$ und $\sum_{i=1}^k v_i = 1$.

(6) – ist die eben definierte K -Menge $K_M^{x^v}$ nicht leer und gilt $K_M^{x^v} \neq K_M^{x^i}$ für $i \in \{1, \dots, k\}$, so enthält $K_M^{x^v}$ nur Randpunkte von $K_M^{x^i}$.

Einer einfacheren Darstellung halber soll im weiteren für eine Strecke mit den Endpunkten x^1 und x^2 das Zeichen $G(x^1, x^2)$ verwendet werden:

$$(7) \quad G(x^1, x^2) = \{x \in A^n \mid x = vx^1 + (1-v)x^2, 0 \leq v \leq 1\}.$$

Für den Anstieg $\varphi_{x^1, x^2}(v)$ der quadratischen Funktion $f(x, x)$ über $G(x^1, x^2)$ ergibt sich wegen der Symmetrie der Matrix C , daß

$$(8) \quad \frac{1}{2}\varphi_{x^1, x^2}(v) = v(f(x^1, x^1) - f(x^1, x^2)) + (1-v)(f(x^2, x^1) - f(x^2, x^2)).$$

Die Bedeutung der K -Mengen für quadratische Optimierungsaufgaben der Art (1) zeigt sich u.a. an der folgenden notwendigen Bedingung für ein lokales Minimum von $f(x, x)$ über M im Punkte \bar{x} , sie lautet:

$$(9) \quad \bar{x} \in K_M^{\bar{x}} \cap M;$$

liegt nämlich \bar{x} nicht in $K_M^{\bar{x}}$, so gibt es ein $\hat{x} \in M$ mit $f(\bar{x}, \bar{x}) > f(\bar{x}, \hat{x})$ und längst der Strecke $G(\hat{x}, \bar{x})$ würde $f(x, x)$ von $v = 0$ bis zu einem $\bar{v} > 0$ abnehmen (vgl. die Darstellungen (7) und (8)). Eine eingehende Diskussion von Optimalitätskriterien im Zusammenhang mit den K -Mengen für Aufgaben der Art (1) findet sich in [3].

Der folgende Satz über eine in M gelegene Richtung nicht zunehmender Werte von $f(x, x)$ spielt für die in diesem Artikel angestrebte Untersuchung eine zentrale Rolle:

(10) **Satz.** *Es sei $x^1 \in K_M^{\bar{x}} \cap M$ mit $\bar{x} \in M$, weiter möge x^2 ein auf der Strecke $G(\bar{x}, x^1)$ gelegener Punkt mit $x^2 \in K_M^{\bar{x}}$ sein. Die quadratische Funktion $f(x, x)$ nimmt entlang der Strecke $G(\bar{x}, x^1)$ von x^1 nach x^2 nicht zu.*

Beweis. Aus $x^1 \in K_M^{\bar{x}}$ folgt $f(x^1, x^1) \geq f(x^1, \bar{x})$. Wegen der Linearität der Funktion $f(x^1, x)$ gilt dann auch $f(x^1, x^1) \geq f(x^1, x^2)$. Da auch $x^2 \in K_M^{\bar{x}}$ liegt, erhält man $f(x^2, x^1) \geq f(x^2, \bar{x})$ und hieraus wiederum $f(x^2, x^1) \geq f(x^2, x^2)$. Zusammen ergibt sich damit die Ungleichung $f(x^1, x^1) \geq f(x^2, x^2)$; da x^1 beliebig aus $K_M^{\bar{x}}$ gewählt war, ist die Behauptung gezeigt.

Die Aussage dieses Satzes (10) läßt sich nun in folgender Weise erweitern (wobei dessen Voraussetzungen unverändert übernommen werden):

(11) **Satz.** *Der Punkt $x^3 \in G(\bar{x}, x^1)$ habe die Eigenschaft, daß $f(x^3, x^3) = \min \{f(x, x) \mid x \in G(\bar{x}, x^1)\}$ ist. Dann gilt entweder $x^3 \in K_M^{x^3}$ oder $x^3 \in \bar{K}_M^{\bar{x}}$.*

Beweis. Gilt $x^3 \in K_M^{\bar{x}} \cap M$, so ist $f(x^3, x) \geq f(x^3, \bar{x})$, $x \in M$. Im Fall $x^3 = \bar{x}$ folgt dann die Behauptung $x^3 \in K_M^{x^3}$.

Es sei nun $x^3 \neq \bar{x}$ und es werde angenommen, daß $x^3 \in \bar{K}_M^{x^3}$ ist und daß gleichzeitig $x^3 \in K_M^{\bar{x}}$ gilt, d.h. es gibt ein $\hat{x} \in M$ mit $\hat{x} \neq x^3$, so daß $f(x^3, x^3) > f(x^3, \hat{x})$ ist,

und für alle $x \in M$ gilt gleichzeitig, daß $f(x^3, x) \geq f(x^3, \bar{x})$. Diese beiden Ungleichungen führen bei gleichzeitiger Gültigkeit zu der Beziehung $f(x^3, x^3) > f(x^3, \bar{x})$. Die Ungleichung widerspricht aber der Festlegung von x^3 als Minimalpunkt in $G(\bar{x}, x^1)$, wie sich unmittelbar aus der Darstellung (8) für den Anstieg von $f(x, x)$ über der Strecke $G(\bar{x}, x^3)$ ergibt. Damit ist die Behauptung des Satzes gezeigt.

Die Sätze (10) und (11) ermöglichen es nun, Aussagen über die mögliche Verteilung lokaler Minima in der durch die K -Mengen erzeugten Struktur von M zu treffen. Zur schärferen Herausstellung werden sich eine Reihe der weiteren Aussagen auf lokale strenge Minima beziehen, d.h. $f(x, x)$ besitzt in $\bar{x} \in M$ ein lokales strenges Minimum über M , falls eine Umgebung U von \bar{x} existiert, daß

$$(12) \quad f(x, x) > f(\bar{x}, \bar{x}), \quad x \in U(\bar{x}) \cap M, \quad x \neq \bar{x}.$$

Aus Satz (10) erhält man speziell die folgende Eigenschaft:

(13) **Corrolar.** *Liegt \bar{x} in $K_M^{\bar{x}} \cap M$, so nimmt $f(x, x)$ auf allen in $K_M^{\bar{x}} \cap M$ gelegenen Strecken, die \bar{x} als einen Endpunkt enthalten, in Richtung auf \bar{x} nicht zu.*

Nach (9) stellt $\bar{x} \in K_M^{\bar{x}}$ eine Vorbedingung für ein lokales Minimum der Aufgabe (1) dar; aus Corrolar (13) folgt nun, daß es in $K_M^{\bar{x}} \cap M$ auch höchstens ein lokales strenges Minimum geben kann.

Liegt ein Punkt \bar{x} aus M nicht in $K_M^{\bar{x}}$, so können nur in solchen Punkten \hat{x} aus $K_M^{\bar{x}}$ lokale Minima von (1) angenommen werden, deren zugehörige K -Mengen $K_M^{\hat{x}}$ mit $K_M^{\bar{x}}$ einen nichtleeren Durchschnitt haben (vgl. dazu (9) und (10)). Wenn speziell \hat{x} ein Punkt aus dem relativen Inneren von $K_M^{\bar{x}}$ ist, dann müßte $K_M^{\hat{x}}$ die K -Menge $K_M^{\bar{x}}$ umfassen (vgl. dazu (6)).

Eine weitere Einschränkung für die Lage möglicher lokaler Minima liefert die nachfolgende Eigenschaft:

(14) **Corrolar.** *Besitzt die Aufgabe (1) in $\bar{x} \in M$ ein lokales strenges Minimum und liegt \bar{x} in $K_M^{\hat{x}}$ mit $\hat{x} \in M$, so kann die Aufgabe im relativen Innern von $K_M^{\hat{x}}$ kein weiteres lokales Minimum besitzen.*

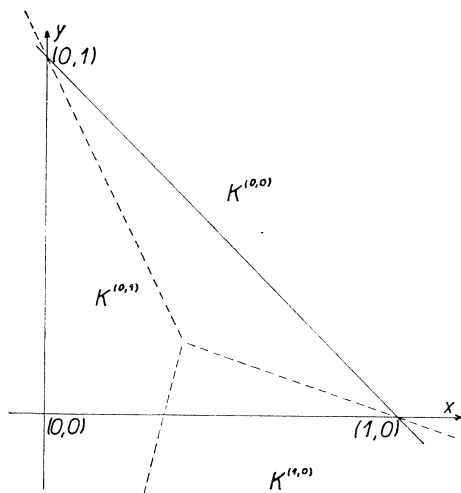
Beweis. Es sei \tilde{x} ein Punkt aus dem relativen Inneren von $K_M^{\hat{x}}$ mit $\tilde{x} \neq \bar{x}$, in dem $f(x, x)$ über M ein lokales Minimum hat; nach (9) folgt $\tilde{x} \in K_M^{\tilde{x}}$. Der Punkt \tilde{x} liegt dann insbesondere auch in der K -Menge $K_M^{x^v} = K_M^{\tilde{x}} \cap K_M^{\hat{x}}$ (vgl. (5)). Gilt $K_M^{x^v} \neq K_M^{\hat{x}}$, so enthält $K_M^{x^v}$ nur Randpunkte von $K_M^{\hat{x}}$ (vgl. dazu (6)), das widerspricht aber der Wahl von \tilde{x} als relativ innerem Punkt von $K_M^{\hat{x}}$. Es bleibt also der Fall $K_M^{x^v} = K_M^{\hat{x}}$ zu untersuchen. Das bedeutet aber, daß \bar{x} auch in $K_M^{\tilde{x}}$ liegt. Nach Corrolar (13) nimmt dann $f(x, x)$ entlang der Strecke $G(\bar{x}, \tilde{x})$ von \bar{x} nach \tilde{x} nicht zu, d.h. aber, daß in \bar{x} kein lokales strenges Minimum eintreten kann, was der Voraussetzung des Satzes widerspricht. Da \tilde{x} beliebig aus dem relativen Inneren von $K_M^{\hat{x}}$ gewählt war, ist die Behauptung gezeigt.

Die Aussage des Corrolars (14) gilt im allgemeinen nicht, falls die Randpunkte der dort betrachteten Menge K_M^x in die Behauptung einbezogen werden; anders formuliert: in einer K -Menge der Aufgabe (1) können mehr als ein lokales strenges Minimum dieser Aufgabe liegen. Ein Beispiel dafür liefert die Aufgabe

$$(15) \quad \min \{x^2 + 6xy + 2y^2 - 2x - 4y \mid x + y \leq 1, x \geq 0, y \geq 0\};$$

sie besitzt in den Punkten $(1,0)$ und $(0,1)$ lokale strenge Minima, beide liegen auf dem Rande der K -Menge $K^{(0,0)}$,

$$K^{(0,0)} = \{(x, y) \in A^2 \mid x + 3y \geq 1, 3x + 2y \geq 2\}.$$



Die beigefügte Abbildung veranschaulicht den diskutierten Sachverhalt; an ihr kann man sich auch andere oben angeführte Eigenschaften verdeutlichen; es ist aber darauf hinzuweisen, daß die K -Mengen im allgemeinen nicht den ganzen A^n überdecken werden (falls nämlich M nicht beschränkt ist) und damit auch nicht notwendig den gesamten Restriktionsbereich M .

Literatur

- [1] Dinkelbach, W.: Sensitivitätsanalysen und parametrische Optimierung. Springer-Verlag Berlin—Heidelberg—New York 1969.
- [2] Lommatzsch, K.: Lineare parametrische Optimierung über allgemeinen konvexen Restriktionsbereichen. Sborník z II. celostátní konference O matematických metodách v ekonomii. Harmonia, 1972. Ekonomicko matematická laboratoř při Ekonomickém ústavu ČSAV, Praha 1973.
- [3] Lommatzsch, K.: Ein notwendiges und hinreichendes Optimalitätskriterium für allgemeine quadratische Optimierungsprobleme. Aplikace matematiky, 19 (1974), 193—197.

Souhrn

O POLOZE LOKÁLNÍCH MINIM ÚLOH KVADRATICKÉHO PROGRAMOVÁNÍ

KLAUS LOMMATZSCH

Úloze minimalizace obecné kvadratické funkce na konvexním uzavřeném restriktivním oboru M se přiřazuje pomocí tzv. K -množin rozklad oboru M . Na základě takto získané struktury restriktivního oboru jsou dokázány věty o jednom směru nerostoucích hodnot kvadratické funkce a o možných polohách lokálních minim uvnitř systému K -množin.

Anschrift des Verfassers: Dr. Klaus Lommatzsch, Sektion Mathematik der Humboldt-Universität zu Berlin, Unter den Linden 6, 108 Berlin, DDR.