Klaus Lommatzsch

Lösungsalgorithmen für quadratische Optimierungsaufgaben mit nicht notwendig konvexer Zielfunktion

Aplikace matematiky, Vol. 19 (1974), No. 3, 203--209

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/103532`

LÖSUNGSALGORITHMEN FÜR QUADRATISCHE OPTIMIERUNGSAUFGABEN MIT NICHT NOTWENDIG KONVEXER ZIELFUNKTION

KLAUS LOMMATZSCH

(Eingegangen am 8. März 1973)

Die beiden im weiteren vorgeschlagenen Lösungsverfahren I und II lassen beliebige quadratische Zielfunktionen zu. Vom Restriktionsbereich M wird gefordert, daß er konvex und abgeschlossen ist; für das Verfahren II ist zusätzlich erforderlich, daß der Restriktionsbereich polyedrisch ist.

Die Verfahren setzen die Beherrschung bestimmter Unterprogramme voraus, auf deren Technik hier nicht weiter eingegangen wird: die Minimierung linearer Zielfunktionen über konvexen abgeschlossenen Mengen M, die Berechnung von Extremwerten quadratischer Funktionen über Strecken bzw. Halbgeraden und die Bestimmung von Schnittpunkten einer Geraden mit einer Hyperebene.

Theoretische Grundlage für die nachfolgend vorgeschlagenen Algorithmen bilden die in [1] und [2] dargelegten Ausführungen zur quadratischen Optimierung, auf die im weiteren ebenfalls nicht näher eingegangen, sondern nur verwiesen wird. Für die quadratische Zielfunktion soll die Kurzbezeichnung $f(x, x)$,

$$f(x, x) \equiv x^T C x + 2p^T x\,, \tag{1}$$

verwendet werden (die Matrix C ist dabei symmetrisch). Der Funktion $f(x, x)$ und einem Punkte x^k aus dem Restriktionsbereich M ist eineindeutig die lineare Funktion

$$f(x^k, x) \equiv x^T C x^k + p^T x + p^T x^k \tag{2}$$

zugeordnet. Die Algorithmen (für Minimumprobleme formuliert) sind so angelegt, daß zunächst ein solcher Punkt x^0 aus M gesucht wird, für den gilt

$$f(x^0, x) \geqq f(x^0, x^0)\,, \quad x \in M\,. \tag{3}$$

Die Gültigkeit dieser Beziehung ist notwendig dafür, daß $f(x, x)$ über M in x^0 ein lokales Minimum besitzt. Daran schließt sich die Überprüfung, ob in x^0 tatsächlich ein lokales Minimum der betrachteten Aufgabe liegt; dabei stützt sich das Vorgehen auf das in [1] angegebene notwendige und hinreichende Optimalitätskriterium.

Die Kenntnis eines zulässigen Punktes x^1 der betrachteten Aufgabe, d.h. eines Elementes x^1 aus M wird ebenfalls vorausgesetzt; seine Gewinnung ist nicht Teil der vorgeschlagenen Verfahren.

DAS VERFAHREN I

Die Aufgabe lautet (unter Verwendung der eingangs erklärten Symbole):

$$\min \{f(x, x) | x \in M\} . \tag{4}$$

Ausgehend von einer zulässigen Lösung $x^1 \in M$ wird eine Folge von Iterationspunkte konstruiert: $x^1, x^2, \ldots, x^k, \ldots$

Der k-te Iterationsschritt

(5) A)
$$\min \{f(x^k, x) | x \in M\} ;$$

als Lösung dieses Teilprogramms ist entweder die Angabe eines Punktes $q^k \in M$ mit der Eigenschaft

$$f(x^k, x) \geqq f(x^k, q^k) , \quad x \in M \qquad (\text{Fall } A_1)$$

erforderlich, oder die Angabe einer ganz in M gelegenen Richtung r, längst derer $f(x^k, x)$ über M unbeschränkt fällt (Fall A_2);

B) dem Fall A_1 schließt sich die Bestimmung des Minimums der quadratisch Funktion $f(x, x)$ über der Strecke $G(q^k, x^k)$ an:

$$\min \{f(x, x) | x \in G(q^k, x^k)\} , \tag{6}$$

wobei $G(q^k, x^k) = \{x \in M | x = vq^k + (1 - v) x^k, 0 \leqq v \leqq 1\}$; dem Fall A_2 schließt sich entsprechend die Aufgabe

$$\min \{f(x, x) | x \in H(r, x^k)\} , \tag{7}$$

an, wobei $H(r, x^k) = \{x \in M | x = x^k + t \, . \, r, t \geqq 0\}$ eine von x^k ausgehende und ganz in M liegende Halbgerade beschreibt.

Schritt B liefert – soweit die betrachteten Teilaufgaben lösbar sind – den Iterationspunkt x^{k+1}.

Diskussion des Verfahrens I.

Das Verfahren kann an zwei verschiedenen Stellen abbrechen:

a) falls im Teilschritt A (Fall A_1) gilt, daß

$$f(x^k, x^k) = f(x^k, q^k) ,$$

so ist x^k ein Punkt aus M, der die Eigenschaft (3) besitzt, oder

b) falls $f(x, x)$ über $H(r, x^k)$ unbeschränkt fällt, so ist die Aufgabe (4) nicht lösbar. Tritt keine der beiden Abbruchsverschriften im Verlaufe des Verfahrens ein, so erhält man eine unendliche Folge von Iterationspunkten $\{x^k\}$, $k = 1, 2, \ldots$, mit der Eigenschaft

$$f(x^k, x^k) > f(x^k, x^{k+1}) \geqq f(x^{k+1}, x^{k+1}) . \tag{8}$$

Die Richtigkeit dieser Ungleichungen ergibt sich aus den Untersuchungen in [2], vgl. dazu dort insbesondere den Satz (11); speziell gilt $q^k \neq q^{k+1}$, falls in zwei aufeinanderfolgenden Iterationsschritten die Aufgaben (5) lösbar sind.

(9) **Satz.** *Ist M beschränkt und liefert das beschriebene Verfahren I eine unendliche Folge von Iterationspunkten $\{x^k\}$, $k = 1, 2, \ldots$, mit der Eigenschaft* (8), *so konvergiert diese Folge zu einem Punkt $x^0 \in M$ mit der Eigenschaft, daß $f(x^0, x) \geqq f(x^0, x^0)$ für alle $x \in M$ gilt.*

Beweis. Aus der Beschränktheit von $f(x, x)$ über M und der Monotonie der Folge $\{f(x^k, x^k)\}$, $k = 1, 2, \ldots$, (vgl. (8)), folgt die Konvergenz dieser Folge. Damit gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein k_0 derart, daß für alle $k > k_0$ gilt:

$$f(x^k, x^k) - f(x^k, x^{k+1}) < \varepsilon .$$

Da $x^{k+1} = \bar{v}_k q^k + (1 - \bar{v}_k)\, x^k$ ist (vgl. dazu die Definition von $G(q^k, x^k)$), folgt auch $\bar{v}_k(f(x^k, x^k) - f(x^k, q^k)) < \varepsilon$ für $k > k_0$. Sowohl der Faktor $\bar{v}_k$ als auch der Faktor $(f(x^k, x^k) - f(x^k, q^k))$ sind positive und beschränkte Größen. Nimmt man an, daß die Folge $\{f(x^k, x^k) - f(x^k, q^k)\}$ keine Nullfolge ist, so muß die Folge $\{\bar{v}_k\}$ für $k \to \infty$ gegen Null streben. Daraus würde folgen, daß die Minima von $f(x, x)$ über $G(q^k, x^k)$ in inneren Punkten dieser Strecken angenommen werden:

$$\bar{v}_k(f(q^k, q^k) - f(q^k, x^k)) + (1 - \bar{v}_k)\,(f(x^k, q^k) - f(x^k, x^k)) = 0$$

für $k > k_0$. Daraus ergibt sich aber, da $\{\bar{v}_k\}$ als Nullfolge vorausgesetzt wird, daß $f(x^k, x^k)$ gegen $f(x^k, q^k)$ strebt, falls $k \to \infty$ strebt. Aus dieser Konvergenz und wegen $f(x^k, x) \geqq f(x^k, q^k)$ für alle $x \in M$ und alle k folgt die Behauptung.

DAS VERFAHREN II

Der nachfolgende Algorithmus bezieht sich auf solche Aufgaben der Art (4), bei denen der Restriktionsbereich M ein Polyeder P ist:

$$\min \{f(x, x) \mid x \in P\} . \tag{10}$$

Der k-te Iterationsschritt

A) wie Teilaufgabe A im Verfahren I; im Fall A_1 folgt die Teilaufgabe C, im Fall A_2 die Teilaufgabe (7) aus Schritt B im Verfahren I;

C) zu dem in Aufgabe (5) berechneten Optimalpunkt q^k wird die K-Menge K^{q^k} berechnet:

$$K^{q^k} = \{\bar{x} | f(\bar{x}, x) \geqq f(\bar{x}, q^k), \ x \in P\}$$

(diese K-Menge ist der Durchschnitt endlich vieler abgeschlossener Halbräume – zu den Eigenschaften der K-Mengen siehe [3] und speziell unter dem Stichwort „Stabilitätsbereiche„ auch [4]);

D) Festlegung einer K^{q^k} berandenden Hyperebene $U^k_{Z(k)}(x) = 0$, die von der Strecke $G(q^k, x^k)$ geschnitten wird und Berechnung dieses Schnittpunktes x^{k+1}, es ist offenbar $U^k_{Z(k)}(x^{k+1}) = 0$;

E) Lösung der Aufgabe

$$\min \{f(x, x) | x \in U^k \cap P\}, \tag{11}$$

wobei $U^k = \{x | U^k_{Z(k)}(x) = 0\}$, man erhält den Iterationspunkt $x^{k+2} \in P$;

F) liegt x^{k+2} nicht in K^{q^k}, so ist der k-te Iterationsschritt abgeschlossen (Fall F_1); liegt x^{k+2} in K^{q^k} (Fall F_2), so wird wie im Schritt B des Verfahrens I die Teilaufgabe (6) gelöst:

$$\min \{f(x, x) | x \in G(q^k, x^{k+2})\}, \tag{12}$$

der berechnete Optimalpunkt x^{k+3} dient als neuer Ausgangspunkt.

Diskussion des Verfahrens II

Die Iterationsschritte, in denen die lineare Funktion $f(x^k, x)$ über P nach unten unbeschränkt ist, verlaufen wie im Verfahren I.

Bei den erreichten Iterationspunkten x^k, q^k und x^{k+1} wird jeweils überprüft, ob sie in den ihnen zugehörigen K-Mengen K^{x^k}, K^{q^k} bzw. $K^{x^{k+1}}$ liegen, d.h. ob sie die Eigenschaft (3) besitzen; ist das der Fall, so bricht man das Verfahren ab.

Die Existenz des Schnittpunktes x^{k+1} (Schritt D) ist gesichert, falls $q^k \in\!\!| K^{q^k}$ gilt. Offenbar ist $f(x^k, x^k) \geqq f(x^{k+1}, x^{k+1})$ – vgl. dazu (8) und die dort nachfolgende Anmerkung.

Die Aufgabe D bildet wieder ein Problem der Art (10); die Dimension des Restriktionsbereiches ist aber kleiner als die von P, denn q^k gehört nicht zu U^k. Ergibt sich, daß $f(x, x)$ über $U^k \cap P$ nach unten unbeschränkt ist, so gilt das auch für das Ausgangsproblem (10). Im anderen Fall bekommt man ein lokales Minimum der Aufgabe (11) im Punkte $x^{k+2} \in P$ mit $f(x^{k+1}, x^{k+1}) \geqq f(x^{k+2}, x^{k+2})$.

Gilt für x^{k+2}, daß es in K^{q^k} liegt, so kann mit Aufgabe (12) fortgesetzt werden; es sind aber auch folgende Verfahrensweisen anwendbar: man bestimmt entweder für die Aufgabe $\min \{f(x^{k+2}, x) | x \in P\}$ von q^k verschiedene Optimalpunkte (die

Existenz solcher ist gesichert, da x^{k+2} auf dem Rand von K^{q^k} liegt) oder man sucht weitere lokale Minima der Aufgabe (11).

Für die Lösung der Teilaufgaben (5) können – sobald P Eckpunkte besitzt – Simplexverfahren verwendet werden. Die im Schritt A berechneten Punkte q^k werden dann im allgemeinen Eckpunkte von P sein. Sind diese nicht entartet, so erhält man unmittelbar aus den Simplextableaus die zugehörigen K-Mengen; im Entartungsfalle sind zusätzliche Berechnungen erforderlich (vgl. dazu [4]).

Das Lösungsverfahren II ist – sobald P beschränkt ist – endlich.

Diese Aussage ergibt sich auf Grund folgender Überlegungen: zur Aufgabe (10) gehören höchstens endlich viele verschiedene K-Mengen, die wiederum von höchstens endlich vielen Hyperebenen erzeugt werden; damit gibt es höchstens endlich viele Teilaufgaben (11) mit endlich vielen lokalen Minima; da die Dimension der Restriktionsbereiche innerhalb einer Folge von ineinandergeschachtelten Teilaufgaben in den Schritten D von Stufe zu Stufe abnimmt, ist auch dieser Prozeß endlich und damit das gesamte Verfahren.

ÜBERPRÜFUNG DER OPTIMALITÄT

Für die mit den oben angegebenen Verfahren I und II berechneten Punkte $x^0 \in M$ gilt: $f(x^0, x) \geqq f(x^0, x^0)$, $x \in M$. Zur Überprüfung, ob $f(x, x)$ über dem jeweiligen Restriktionsbereich in x^0 ein lokales Minimum besitzt, ist es erforderlich zu überprüfen, of für alle Elemente $\bar{x}$ aus M mit $f(x^0, \bar{x}) = f(x^0, x^0)$ die Ungleichung $f(\bar{x}, \bar{x}) \geqq f(\bar{x}, x^0)$ erfüllt ist (vgl. dazu das Optimalitätskriterium in [1]). Die Bestimmung aller Elemente $\bar{x}$ aus M mit der angegebenen Eigenschaft bedeutet die Berechnung der gesamten Optimalmenge der Aufgabe $\min \{f(x^0, x) | x \in M\}$. Im Falle der linearen Optimierung ist von Nožička [5] dazu ein Verfahren angegeben worden. Gilt für ein $\hat{x}$ mit $f(x^0, \hat{x}) = f(x^0, x^0)$, daß $f(\hat{x}, \hat{x}) < f(\hat{x}, x^0)$, so ist mit $\hat{x}$ ein neuer Iterationspunkt gefunden.

ZUR FRAGE DER BESTIMMUNG ALLER LOKALER MINIMA

Es sei x^0 ein Optimalpunkt der Aufgabe (4). Unter Ausnutzung der Berechnungen zum vorangegangenen Abschnitt lassen sich alle die K-Mengen $K^{\hat{x}}$ bestimmen, die x^0 enthalten. Weder in K^{x^0} noch im relativen Innern der K-Mengen $K^{\hat{x}}$ können weitere lokale Minima der Aufgabe (4) liegen (wenn von den Fällen abgesehen wird, wo $f(x, x)$ in bestimmten linearen Unterräumen konstant ist) – vgl. dazu [2].

Um also von x^0 verschiedene Optimalpunkte zu bestimmen, genügt es, sie in der verbleibenden Restriktionsmenge $M \setminus \bigcup_{x^0 \in K^{\hat{x}}} K^{\hat{x}}$ zu suchen. Ist diese nichtkonvex, so kann sie aber mit Hilfe der K-Mengen der Ausgangsaufgabe wiederum in konvexe Teilmengen zerlegt werden.

BEISPIEL FÜR DAS VERFAHREN II

$$\min \{2x_1^2 - 2x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_1 | x_1 + x_2 - x_3 \leqq 1 ,$$
$$-x_2 + 2x_3 \leqq 2 ,$$
$$x^T = (x_1, x_2, x_3) \geqq 0\} .$$

Als zulässiger Ausgangspunkt x^1 kann $(0, 0, 0)$ gewählt werden. Teilaufgabe A liefert dann den Optimalpunkt $q^1 = (2, 0, 1)$ mit dem Zielfunktionswert

$$f(x^1, q^1) = -2 < 0 = f(x^1, x^1) ,$$

d.h. x^1 besitzt die Eigenschaft (3) nicht. Die zum Punkt q^1 gehörende Menge K^q ergibt sich zu:

$$K^{q^1} = \{x | 2x_1 - x_2 - x_3 \leqq 1,\ 5x_1 - x_2 - x_3 \leqq 1,\ x_1 - x_2 - x_3 \leqq 1\} ;$$

q^1 gehört dieser Menge nicht an. Schritt D liefert den Punkt $x_2 = (2/9, 0, 1/9)$ mit $f(x^2, x^2) = -\frac{32}{81}$ als Schnittpunkt von $G(q^1, x^1)$ mit $5x_1 - x_2 - x_3 = 1$. Aus Teilaufgabe E erhält man den Punkt $x^3 = (1, 2, 2)$ mit $f(x^3, x^3) = -8$; er gehört zu K^{q^1}. Da auch $f(x^3, q^1) = -8$ ist, folgt $x^3 \in K^{x^3}$. Die Optimalmenge N der Aufgabe $\min \{f(x^3, x) | x \in P\}$ ergibt sich zu

$$N = \{(x_1, x_2, x_3) | x_1 = 2 - t,\ x_2 = 2t,\ x_3 = t + 1;\ t \in [0, 2]\} ;$$

über N besitzt $f(x, x)$ an der Stelle $t = 1$ sein Minimum. Da nur für Punkte $\bar{x}$ aus N die Gleichheit $f(x^3, \bar{x}) = f(x^3, x^3)$ besteht, ist mit x^3 ein Optimalpunkt gefunden. Weitere besitzt die gestellt Aufgabe nicht, denn die x^3 enthaltenden K-Mengen K^{x^3}, K^{q^1} und K^{q^2} mit $q^2 = (0, 4, 3)$ überdecken den Restriktionsbereich der untersuchten Aufgabe vollständig.

Literatur

[1] *Lommatzsch, Klaus:* Ein notwendiges und hinreichendes Optimalitätskriterium für allgemeine quadratische Optimierungsprobleme. Aplikace matematiky, 19 (1974), 193—197.

[2] *Lommatzsch, Klaus:* Über die Lage lokaler Minima quadratischer Funktionen. Aplikace matematiky, 19 (1974), 198—202.

[3] *Lommatzsch, Klaus:* Lineare parametrische Optimierung über allgemeinen konvexen Restriktionsbereichen. Sborník z II. celostátní konference O matematických metodách v ekonomii, Harmonia 1972. Ekonomicko matematická laboratoř při Ekonomickém ústavu ČSAV, Praha 1973.

[4] *Nožička, F. - Guddat, J. - Bank, B. - Hollatz, H.:* Lineare parametrische Optimierung. Akademie-Verlag Berlin 1973.

[5] *Nožička, F.:* Über die Eindeutigkeit der Lösung von linearen Optimierungsproblemen. Math. Operationsforschung und Statistik 1, 5—20 (1970).

Souhrn

ALGORITMY PRO ŘEŠENÍ ÚLOH KVADRATICKÉHO PROGRAMOVÁNÍ, NEMAJÍCÍCH NUTNĚ KONVEXNÍ CÍLOVOU FUNKCI

KLAUS LOMMATZSCH

V článku jsou navrženy dvě iterativní metody pro řešení úlohy kvadratického programování, přičemž se za cílovou funkci připouští libovolná kvadratická funkce a jako restrikční obor každá konvexní a uzavřená množina uvažovaného prostoru. Popsané metody vyžadují v podstatě jenom lineární postupy a případně též minimalizaci kvadratické funkce na úsečce. Metoda I může být nekonečná, metoda II, vyžadující polyedrický restrikční obor, je konečná. Navržené metody se opírají o nutné a postačující optimalizační kritérium, popsané v [1] a o směry nestoupajících (nerostoucích) hodnot kvadratické funkce, popsané v [2].

Anschrift des Verfasser: Dr. *Klaus Lommatzsch,* Sektion Mathematih der Humboldt-Universität zu Berlin, Unter den Linden 6, 108 Berlin, DDR.